TRATTATO
D'ARITMETICA

DI GIUSEPPE BERTRAND

Membro dell'Istituto di Francia

TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE ED AGGIUNTE

DI GIOVANNI NOVI

Professore di Algebra nella R. Università di Pisa

NUOVA EDIZIONE

CON MODIFICAZIONI ED AGGIUNTE

PER CURA

del Dott. ANTONIO SOCCI

FIRENZE

SUCCESSORI LE MONNIER

1905

Firenze, Tip. Luigi Niccolai, Via Faenza, 44.

PREFAZIONE

Invitato a curare la ristampa di quel libro pregevole, che è il Trattato d'Aritmetica del prof. G. Bertrand, (tradotto già dal prof. Novi), concetto principale, che mi ha guidato in questo lavoro, è stato di conservare l'opera, per quanto mi era possibile, nella sua originalità. La bontà del metodo, il rigore e l'ordine delle dimostrazioni, hanno fatto oramai di questo libro uno dei più accetti e, non esito a dire, quello più generalmente adottato nelle nostre Scuole secondarie classiche e tecniche.

L'unico appunto, che da molti veniva ad esso fatto, era di presentarsi in alcuni punti sotto una forma un po' oscura per l'intelligenza dei giovani: ho cercato di rimediarvi con leggere modificazioni nella forma, non nella sostanza, delle dimostrazioni, là dove mi è sembrato conveniente. Ho mirato sopra tutto alla chiarezza della esposizione, alla esattezza delle definizioni, alla rigorosa precisione nel modo di enunciare i teoremi e le regole: ho cercato in una parola di rendere il libro sempre più adatto all'uso, cui è destinato, facendo tesoro

delle osservazioni raccolte in molti anni d'insegnamento.

A tale scopo non ho esitato a sopprimere alcune parti, o aggiunte dal Traduttore, o anche originali dell'Autore, che però era inutile il conservare, considerata l'estensione dei programmi vigenti nelle nostre scuole.

Inspirandomi a questi concetti, ho cominciato dal portare alcune delle note, che erano nelle passate edizioni in fine dell'opera, al posto, che mi è sembrato spettar loro più razionalmente, ed ho fatto seguire alla numerazione il cenno sui Numeri romani, alla teorica delle quattro operazioni sui numeri interi il cenno sui differenti sistemi di numerazione. È stata soppressa del tutto la nota sulle frazioni continue, la quale non serviva che a chiarire alcune considerazioni sui rapporti incommensurabili, modificate in questa edizione.

Nulla ho mutato nel capitolo che tratta della divisibilità dei numeri, per quanto il Traduttore abbia derivato le condizioni di divisibilità per 9 e per 11 da principî diversi da quelli, dai quali le ha dedotte l'Autore; ciò perchè mi pare che il metodo sia più strettamente rigoroso ed anche ingegnoso e semplice.

Nella teoria del massimo comun divisore, pur lasciando tutte le stesse proprietà dimostrate, ho trattato separatamente quelle, che si riferiscono al massimo comun divisore di due numeri, da quelle analoghe, che si hanno per il massimo comun divisore di più numeri.

Mi è sembrato inutile conservare il capitolo IX dell'antica edizione, che si riferiva alla teoria generale dei divisori e dei multipli comuni (che non si trova neppure nell' ultima edizione originale francese), perchè condotto in modo perfettamente analogo a quello, con cui è trattato l' argomento stesso per i numeri interi, e perchè facilmente si può vedere come ai numeri frazionarî si possano applicare gli stessi teoremi, che conducono alla ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune dei numeri interi.

Ho soppresso del tutto il capitolo XX della antica edizione (Approssimazioni decimali), perchè trattava questioni, che spetterebbero più propriamente ad un trattato di Aritmetica generale; invece ho aggiunto nella teoria delle frazioni decimali un cenno sulla moltiplicazione e divisione abbreviate, come si trova nell'originale, completandolo con un cenno sull'addizione e sottrazione abbreviate.

I due capitoli, che trattano del Sistema metrico decimale e dei Numeri complessi sono stati, il primo rinnuovato di sana pianta, perchè trattato a brevissimi cenni, il secondo quasi completamente rifuso, perchè non pienamente svolto nell'antica edizione.

Nulla ho creduto dover cambiare, nè aggiungere nel breve cenno sui numeri incommensurabili, che fa seguito alle teorie della radice quadrata e cubica, perchè lo studio di questi numeri

spetta più propriamente alla Aritmetica generale e fa parte, infatti, nelle scuole nostre del programma di Algebra. Per la stessa ragione ho tralasciato tutto ciò che si riferiva al calcolo dei radicali.

È stata leggermente modificata la teoria dei rapporti riportandola al puro cenno, o poco più, che ne dà l'Autore nel suo lavoro originale, e lasciando delle aggiunte del Traduttore, modificate e completate, solo quel tanto, che può bastare a dare un'idea dei rapporti fra numeri incommensurabili, senza fare su questo argomento ampie considerazioni, che escirebbero al solito dai limiti di uno studio elementare dell'Aritmetica.

Ho creduto bene di svolgere con una certa larghezza le applicazioni della teoria delle proporzioni, sopprimendo però tutto quel che si riferisce alle rendite vitalizie ed alla regola congiunta, perchè queste hanno il loro posto naturale piuttosto in un trattato di Computisteria. Ho limitato gli esempi relativi a questioni di interessi composti ed annualità a casi semplicissimi, perchè in generale richiedono la conoscenza dei logaritmi e conseguentemente delle progressioni, teorie, che ho creduto opportuno tralasciare nella presente ristampa. Queste non si possono trattare rigorosamente, senza presupporre delle nozioni di Algebra, ed infatti fanno parte del programma di questa materia nelle scuole secondarie, dimodochè nella presente opera non varrebbero che ad accrescere la mole del libro, senza potere essere completamente svolte.

Per riparare ad un altro inconveniente generalmente lamentato, quello cioè della mancanza in questo libro di testo di problemi veramente pratici, ho, in ciascun capitolo, fatto seguire agli esercizî teorici, che già si trovavano nella massima parte nell'antica edizione, un certo numero di problemi puramente pratici di varia natura, alcuni dei quali tratti da altri libri, i più appositamente redatti per questo.

Sarò pienamente soddisfatto dell'opera mia, se questa nuova forma, sotto cui si presenta l'ottimo lavoro, servirà a renderlo sempre più accetto nella scuola, e sarò grato a tutti i benevoli Colleghi, che vorranno suggerirmi modificazioni utili, o correzioni di possibili mende involontarie, per le successive eventuali edizioni.

Firenze, Decembre 1892.

A. Socci

SEGNI E DENOMINAZIONI

USATI IN QUESTO LIBRO

$+$ significa *più*

$-$ » *meno*

$\times$ » *moltiplicato per*

$:$ » *diviso per*

$=$ » *eguale a*

$>$ » *maggiore di*

$<$ » *minore di*

$\sqrt{}$ » *radice quadrata di*

$\sqrt[3]{}$ » *radice cubica di*

L' espressione aritmetica, che sta ad indicare che due quantità hanno lo stesso valore, si dice *eguaglianza;* le due quantità si dicono *membri dell' eguaglianza.*

Esempio. $5+7=6\times 2$ è una eguaglianza, il primo membro della quale è $5+7$, il secondo 6×2.

Teorema è una verità non evidente per sè stessa e che diviene tale mediante un ragionamento, che dicesi *dimostrazione.*

*I numeri aggiunti dal Traduttore sono contrassegnati con un asterisco *.*

TRATTATO D'ARITMETICA

CAPITOLO I

NOZIONI PRELIMINARI — NUMERAZIONE DECIMALE

NOZIONI PRELIMINARI

1. Si chiama *grandezza* tutto ciò che è suscettibile di aumento o di diminuzione. Quindi uno stesso oggetto fa nascere in noi l'idea di tante grandezze diverse quante maniere concepiamo di modificarlo; così la presenza di un oggetto più o meno lungo, più o meno pesante, che si muove più o meno velocemente, ci fa acquistare la nozione delle grandezze che si chiamano *lunghezze*, *pesi*, *velocità*, ecc.

2. Le matematiche sono la scienza delle grandezze, ma non di tutte le grandezze. Ed invero, tuttochè un oggetto possa essere più o meno bello, più o meno utile, lo studio del bello e dell'utile non è un ramo delle matematiche. *Le matematiche trattano solamente delle grandezze misurabili.*

3. Misurare una grandezza significa determinarla con precisione, paragonandola ad un'altra grandezza della stessa natura, che si considera come conosciuta. Dire, per esempio, che una lunghezza è tre metri, significa darne la misura ed esprimerla mediante il metro.

La grandezza che serve a misurarne delle altre prende il nome di *unità*. Nell'esempio precedente il metro è l'unità.

Le grandezze misurate assumono il nome di *quantità*.

4. Il risultato della misura di una grandezza si rappresenta mediante un *numero*. Quando si dice, per esempio, una distanza di tre metri, un peso di quindici chilogrammi, un vaso di tre quarti di litro, ecc., le parole *tre*, *quindici*, *tre quarti*, rappresentano numeri.

L'origine più naturale dell'idea di numero si trova nella considerazione di molti oggetti distinti; ed è per estensione che s'introduce nella misura di tutte le grandezze. Così, per esempio, le quantità, un gregge di quindici montoni ed un peso di quindici chilogrammi, contengono ambedue quindici volte la respettiva unità; ma nella prima l'idea è più semplice, perchè la separazione delle unità è materiale, mentre nella seconda è puramente fittizia. Le prime si dicono *quantità discrete;* le seconde *continue*.

Le frazioni ed i numeri incommensurabili, che i geometri considerano pure come numeri, rappresentano tra la quantità e la sua unità una relazione più complicata, di cui terremo parola più tardi.

5. Quando un numero è enunciato senza indicare la specie delle unità che rappresenta, si chiama numero *astratto;* nel caso contrario, dicesi numero *concreto;* così 7 è un numero astratto, e 7 litri un numero concreto.

Queste denominazioni sono molto comuni; ma dobbiamo avvertire che la seconda potrebbe far nascere una idea inesatta; giacchè un numero concreto non è un numero, ma una quantità. Quando si dice 7 litri, il numero è 7; la parola litri completa, ma non modifica l'idea.

6. L'Aritmetica comprende l'arte di effettuare le operazioni alle quali danno luogo i numeri e lo studio delle proprietà di essi; ma questa seconda parte sarà ridotta in questo trattato alle proposizioni fondamentali che possono facilitare o abbreviare le operazioni.

NUMERAZIONE DECIMALE

Definizione dei numeri interi

7. Numeri interi chiamansi quelli che rappresentano l'unità o la riunione di più unità. Il loro studio forma la parte principale dell'Aritmetica, perchè è sempre sui numeri interi che si fanno in ultima analisi le operazioni.

Benchè la maniera di scrivere e di enunciare i numeri interi sia necessariamente familiare a quelli che intraprendono lo studio teorico dell'Aritmetica, tuttavia l'importanza di questo sistema di numerazione nell'arte di fare i calcoli è tale che stimiamo indispensabile indicarne accuratamente i principî.

Numerazione parlata

8. I primi numeri hanno ricevuto nomi indipendenti gli uni dagli altri: *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, e *dieci*. Il numero *dieci*, che si chiama base del sistema, serve a formare delle nuove unità il cui uso semplifica notevolmente l'espressione parlata e scritta dei numeri superiori.

Queste unità sono:

L'unità del second' ordine, o dieci unità semplici.
L'unità del terz' ordine, o cento unità semplici.
L'unità del quart' ordine, o mille unità semplici.

L'unità del quint'ordine, o dieci mila unità semplici.
L'unità del sest'ordine, o cento mila unità semplici.
L'unità del settimo ordine, o un milione d'unità semplici; e via di seguito.

Ciascuna di queste unità ne vale dieci dell'ordine precedente; e, per conseguenza, cento dell'ordine che la precede di due posti, mille dell'ordine che la precede di tre posti, e così di seguito.

Esempio. Un milione vale dieci centinaia di migliaia, cento decine di migliaia, mille volte mille, dieci mila volte cento, e cento mila volte dieci.

Furono dati nomi particolari a tutti i numeri di decine inferiori a dieci decine. Questi nomi sono: *venti, trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta*. È inutile indicare il significato di ciascun nome.

I numeri compresi fra dieci e cento si esprimono indicando il più gran numero di decine che contengono ed aggiungendovi il nome del numero minore di dieci che li completa. Così dicesi: *trenta sette*.

È evidente che a questo modo si possono enunciare tutti i numeri minori di cento.

I numeri maggiori di cento e minori di mille si esprimono enunciando il più gran numero di centinaia che contengono e aggiungendo il nome del numero, evidentemente minore di cento, che li completa. Così dicesi: *trecento quaranta sette*.

È chiaro che a questo modo possono enunciarsi tutti i numeri minori di mille.

I numeri compresi fra mille e un milione si esprimono enunciando quante migliaia contengono e unendovi il nome del numero inferiore a mille che li completa. Così dicesi: *trecento quaranta due mila*, *ottocento cinquanta sette*.

Per esprimere i numeri compresi fra un milione e mille milioni o un *bilione*, s'indica quanti milioni contengono questi numeri, e si aggiunge il nome del numero minore di un milione che li completa. Cosí dicesi: *trenta cinque milioni*, *ottocento trenta due mila, trecento quaranta due.*

Si può continuare così indefinitamente, purchè si sappia che mille bilioni fanno un trilione, mille trilioni un quatrilione, ecc.

9. Osservazione. Nell'uso abituale del nostro sistema di numerazione, le unità del 4°, 7°, 10°... ordine (*migliaia*, *milioni*, *bilioni*,.....) sono le più importanti. In effetto le altre spariscono dal linguaggio, e, tranne per le decine e le centinaia, non sono state neppure create parole speciali per distinguerle; in guisa che nella numerazione parlata, invece di chiamare l'attenzione sulla decomposizione dei numeri in unità del primo, secondo, terzo, quarto, quinto ordine, si presentano come decomposti in unità, migliaia, milioni, ecc., cioè a dire in unità di mille in mille volte più grandi. Quest'uso adduce maggiore brevità nel linguaggio; ma non ha alcuna influenza sopra i calcoli, che si eseguiscono sempre sopra numeri scritti.

Principî della numerazione scritta

10. I nove primi numeri sono rappresentati da segni particolari, che chiamansi *cifre*. Questi nove segni, ai quali ne è stato aggiunto un decimo, 0 (*zero*), bastano per scrivere tutti i numeri. Per questo oggetto si è convenuto di attribuire alle cifre, oltre il loro valore assoluto (che è quello che esse hanno preso isolatamente cioè in unità semplici) un valore relativo dipendente dalla loro posizione, mediante il principio convenzionale

che *una cifra rappresenta unità di quell' ordine, che corrisponde al posto che essa occupa a partire dalla destra;* cioè a dire che rappresenta unità semplici quando non è seguita da alcun' altra; decine, se ha una cifra alla sua destra; centinaia se ne ha due, ecc.

Esempio. Nel numero 4738 la cifra 8 rappresenta le unità semplici, 3 rappresenta le decine, 7 le centinaia e 4 le migliaia.

11. Osservazione. Una cifra può essere altresí considerata come rappresentante unità di un ordine qualunque inferiore a quello corrispondente al posto da essa occupato, purchè di queste unità se ne conti un numero dieci, cento, mille.... volte maggiore, se il loro ordine è dieci, cento, mille.... volte minore di quello della cifra considerata. Per esempio, 3 seguito da cinque altre cifre esprime egualmente 3 centinaia di migliaia, 30 decine di migliaia, 300 migliaia, 3000 centinaia, 30000 decine, ovvero 300000 unità.

12. Dalla convenzione che precede si deducono le due regole seguenti, che costituiscono la numerazione scritta.

Regola per leggere un numero scritto

Quando il numero non ha più di quattro cifre, si enunciano successivamente le differenti cifre, dicendo dopo ciascuna di esse il nome delle unità che rappresenta.

Esempio. 3454, *tremila quattrocento cinquanta quattro.*

Quando ha più di quattro cifre, si decompone mentalmente in gruppi di tre cifre cominciando dalla destra, avvertendo che l'ultimo gruppo può contenere una o due cifre.

Il primo gruppo a destra rappresenta allora unità semplici, il secondo migliaia, il terzo milioni, il quarto bilioni, ecc.; si leggono successivamente i numeri formati dall'insieme delle tre cifre di uno stesso gruppo, facendo seguire questa lettura dall'indicazione della specie di unità rappresentata dai gruppi. (*a*)

Esempio. Il numero 34211893514, si legge: 34 *bilioni*, 211 *milioni*, 893 *mila*, 514 *unità*.

Regola per scrivere un numero enunciato

13. Essendo il numero decomposto, come nella numerazione parlata, in unità semplici, migliaia, milioni, bilioni, ecc., si scrivono i numeri rappresentanti i gruppi di ciascuna specie di unità alla destra gli uni degli altri cominciando da quelli dell'ordine più elevato, e terminando con le unità semplici. Fa d'uopo aver cura che ciascuno di questi gruppi abbia precisamente tre cifre, e porre quindi degli zeri alla sinistra di quelli che sono espressi con una o due cifre. Se un gruppo di unità mancasse completamente, bisognerebbe porre tre zeri nel posto delle tre cifre che gli corrispondono, affinchè le cifre poste a sinistra conservino il valore relativo che debbono avere.

(*a*) Restando sempre nel medesimo sistema di numerazione decimale taluni spartiscono i numeri in gruppi di sei cifre, invece che di tre. Così ai gruppi di *unità, migliaia, milioni, bilioni*, ecc., sostituiscono quelli di *unità, milioni, bilioni, trilioni*, ecc., avvertendo che ogni gruppo contiene unità, decine, centinaia, migliaia, decine di migliaia, centinaia di migliaia.

Esempio. — Il numero 23,784506,034208,390265 col metodo accennato si pronunzia: *venti tre trilioni, settecento ottanta quattro mila cinquecento sei bilioni, trenta quattro mila duecento otto milioni, trecento novanta mila duecento sessanta cinque:* mentre col metodo esposto nel testo si leggerebbe 23 *quintilioni*, 784 *quadrilioni*, 506 *trilioni*, 034 *bilioni*, 208 *milioni*, 390 *mila*, 265 T.

Esempio. *Settecento quaranta tre milioni, novanta nove unità;* si scrivono: 743 000 099. Si scrivono tre zeri nel posto delle migliaia che mancano, e 099 in vece di 99 pel gruppo delle unità, affinchè questo gruppo contenga tre cifre.

14. Si vede che il nostro sistema di numerazione consiste essenzialmente nella decomposizione dei numeri in diverse parti, le quali tutte derivano semplicemente dall' unità principale; ciò che permette di farsi più facilmente una idea del loro valore. Ma questo vantaggio è solamente secondario, ed un altro ben più importante si renderà manifesto a misura che procederemo nello studio dell'Aritmetica. Vedremo che nella soluzione della maggior parte delle questioni di Aritmetica si opera separatamente sopra ciascuna di queste parti invece di operare immediatamente sul numero stesso.

Numeri romani

15. I Romani non avevano cifre apposite per la scrittura dei numeri, ma usavano le lettere del loro alfabeto disposte in un modo convenuto. Ecco i segni fondamentali da essi usati e la loro corrispondenza in cifre arabe;

I	V	X	L	C	IↃ o D	CIↃ o M	IↃↃ	CCIↃↃ
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000

Con questi caratteri indicavano anche tutti i numeri intermedî mediante queste convenzioni: 1° Una cifra posta alla destra di un'altra di valore eguale o maggiore s'intende sommata con questa, ed una cifra posta innanzi ad una di maggior valore s' intende sottratta da questa; 2° Più di tre cifre eguali di seguito

non si scrivono; 3° Più recentemente è stato stabilito che una lineetta orizzontale posta al disopra di una cifra le fa acquistare un valore mille volte maggiore.

Avremo quindi applicando questi principî convenzionali:

II	III	IV	VI	VII	VIII	IX	XI	XII	XIV
2	3	4	6	7	8	9	11	12	14

XV	XVI	XIX	XX	XXX	XL	LX	XC
15	16	19	20	30	40	60	90

CX	CXX	CXLVII	CIↃIↃCCCXCII o MDCCCXCII
110	120	147	1892

$\overline{\text{IV}}$	$\overline{\overline{\text{IV}}}$
4000	4000000

Avvertiamo che i caratteri D ed M sono stati sostituiti agli altri IↃ e CIↃ in tempi più moderni, e quindi oggidì si fa sempre uso di questi.

Esercizî

I. Si scriva la serie naturale dei numeri senza separare le differenti cifre. Cercare la 75892^{esima} cifra di questa serie.

II. Provare che il numero, che esprime quante cifre vi sono nella serie naturale dei numeri dopo l'unità sino a un numero, di cui tutte le cifre sono dei 9, cioè 9999999........, ha per ultima cifra un 9 preceduto da un certo numero di 8, i quali ultimi sono preceduti da un numero di tante unità quanti 8 vi sono alla sua destra. Per esempio, il numero di cifre che si deve scrivere per fare la tavola dei primi 99 numeri è 189; per i primi 999 ve ne bisognano 2889; per i primi 9999, 3889, ecc.

III. Consideriamo due numeri qualunque, 1 e 2 per esempio, e formiamo una serie di numeri tali che ciascuno sia eguale alla somma dei due precedenti, cioè a dire operiamo nel modo seguente: 1 e 2 fanno 3; 2 e 3 fanno 5; 3 e 5 fanno 8; 5 e 8 fanno 13, ecc.; provare che continuando indefinitamente, vi saranno sempre quattro numeri di questa serie almeno, e cinque al più, che avranno un dato numero di cifre.

IV. Una lotteria si compone di 200 numeri, dei quali si hanno solamente i numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Come procedere per fare l'estrazione?

V. Si posseggono cinque pesi di un grammo, cinque di dieci grammi, cinque di cento grammi, cinque di mille grammi, cinque di dieci mila grammi ecc, Mostrare che si può pesare mediante una bilancia un oggetto, il cui peso è rappresentato da un numero qualunque di grammi.

CAPITOLO II

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEI NUMERI INTERI

ADDIZIONE

Definizioni

16. L'*addizione* consiste nella riunione di due o più quantità della stessa specie in una sola. In Aritmetica queste quantità sono rappresentate da numeri, e l'addizione ha per oggetto di trovare il numero che esprime la loro riunione, ovvero la loro *somma*.

L'addizione s'indica col segno $+$, che si legge *più*.

Esempio. $5 + 7$ significa 5 più 7.

Per addizionare due numeri è inutile conoscere la specie delle unità che rappresentano, ma è sufficiente sapere che queste unità sono le stesse. Così dicendo: *sette e tre fanno dieci*, si esprime ad una volta che: *sette metri e tre metri fanno dieci metri*, *sette case e tre case fanno dieci case*, *sette centinaia e tre centinaia fanno dieci centinaia*.

È indispensabile sapere che i numeri astratti non rappresentano nulla per loro stessi; e che, operando sopra essi, s'intende solamente che la specie delle unità che rappresentano non è ancora fissata, ma potrà esserlo ulteriormente in un modo arbitrario.

Addizione dei numeri di una sola cifra

17. Per eseguire un'addizione fa d'uopo sapere aggiungere i numeri di una sola cifra. Non vi sono re-

gole per trovare i resultati di queste semplici operazioni, che è mestieri apprendere a memoria. Si può ottenerli facilmente contando sulle dita. Non insisto sopra questo metodo conosciuto da tutti, e del quale ben pochi hanno bisogno di fare uso.

Principio sul quale si fonda la teoria dell'addizione

18. L'addizione di due numeri qualunque si riduce all'addizione dei numeri minori di dieci, mediante il principio seguente:

Per addizionare due numeri si può, dopo averli decomposti in parti, aggiungere in un ordine qualunque queste parti le une alle altre, e riunire le somme parziali che ne risultano. In effetto è evidente che il risultato così ottenuto conterrà tutte le parti dei due numeri, e sarà per conseguenza la loro somma.

Addizione di due numeri

19. Siano da addizionare i due numeri 7847 e 3952,

$$\begin{array}{r} 7847 \\ 3952 \\ \hline 11799 \end{array}$$

Questi due numeri possono essere decomposti ciascuno in quattro parti: unità, decine, centinaia, migliaia; e si potrà, secondo il principio precedente, addizionare separatamente le unità dello stesso ordine e riunire i resultati parziali.

Si dirà: 7 unità e 2 unità fanno 9 unità; 9 può essere scritto immediatamente come cifra delle unità, giacchè le operazioni seguenti forniranno unità di or-

dine superiore, e non potranno quindi modificare la cifra delle unità semplici.

4 decine e 5 decine fanno 9 decine; si può, per una simile ragione, scrivere 9 come cifra delle decine.

8 centinaia e 9 centinaia fanno 17 centinaia, cioè a dire un migliaio più 7 centinaia; si può scrivere 7 come cifra delle centinaia, e riserbarsi di aggiungere il migliaio alla somma delle migliaia, quando l'avremo effettuata.

7 migliaia e 3 migliaia fanno 10 migliaia; più quello ottenuto innanzi, 11 migliaia, cioè a dire una decina di migliaia e un migliaio; le cifre corrispondenti a questi due ordini di unità sono, per conseguenza, l'una e l'altra eguale ad 1, e la somma domandata è 11799.

Un ragionamento analogo potrà farsi in ciascun caso; quindi si ha la regola seguente:

Per eseguire l'addizione di due numeri si scrivono l'uno al disotto dell'altro in modo che le unità dello stesso ordine si corrispondano. Si addizionano dapprima le cifre delle unità; se questa somma non è maggiore di 9, si scrive al risultato, di cui essa è la cifra delle unità; se supera 9, si scrivono le sole unità e si porta una decina per unirla alla somma ottenuta mediante l'addizione delle cifre delle decine. Si continua al modo stesso addizionando sempre le unità dello stess' ordine nei due numeri sino a quelle dell'ordine più elevato, la cui somma, aggiunta a ciò che si è riportato precedentemente, si scrive come si è trovata.

Se uno dei due numeri proposti ha meno cifre dell'altro, la regola precedente si applica al modo stesso, dovendosi solamente considerare le cifre mancanti alla sinistra del più piccolo numero come sostituite da zeri.

Addizione di molti numeri

20. Per addizionare più di due numeri si procede in un modo analogo, e in conformità della regola seguente:

Per sommare molti numeri si scrivono gli uni sotto gli altri in modo che le unità dello stess' ordine si trovino sopra una medesima colonna verticale. Si fa la somma delle cifre della prima colonna a destra ch' è quella delle unità; se questa somma non sorpassa 9, si scrive al risultato come cifra delle unità. Se sorpassa 9, si scrivono le sole unità, e le decine si ritengono a memoria per unirle alla somma delle cifre della seconda colonna, sulla quale si opera in un modo analogo, e così di seguito sino all' ultima colonna, la cui somma, unita a ciò che si è riportato precedentemente, si scrive come si è trovata.

Questa regola non ci sembra aver bisogno di dimostrazione; per applicarla basta saper sommare molti numeri di una sola cifra; questa addizione si farà successivamente, cioè a dire che si sommeranno i due primi numeri, poi il risultato ottenuto col terzo, e così di seguito. Queste operazioni si eseguiscono ordinariamente a memoria.

Riprova dell' addizione

21. La riprova di un' operazione è una seconda operazione che serve di riscontro alla prima.

Per fare la riprova di un' addizione si può ricominciare l' addizione, scrivendo i numeri proposti in un ordine differente da quello precedentemente adottato; oppure, se si vuol conservare lo stesso ordine, si opera

addizionando le cifre dal basso all'alto, se la prima volta le avevamo sommate dall'alto in basso. Se si ritrova così il resultato già ottenuto, si ha sufficiente ragione per ritenerlo esatto.

SOTTRAZIONE

Definizioni

22. La *sottrazione* ha per oggetto di cercare la differenza di due quantità, o, in altri termini, ciò che si deve aggiungere alla minore di esse per renderla eguale alla maggiore. In Aritmetica queste quantità sono rappresentate da numeri, e la sottrazione ha per oggetto di trovare la differenza di due numeri. Per cercare la differenza di due numeri è inutile conoscere la specie delle unità che rappresentano; così dicendo: *dodici meno quattro fanno otto*, si esprime ad una volta che *dodici metri meno quattro metri fanno otto metri*, *dodici case meno quattro case fanno otto case*, *dodici centinaia meno quattro centinaia fanno otto centinaia*.

La sottrazione s'indica col segno —, che si legge *meno*.

Esempio. 12 — 4 significa 12 meno 4.

Il risultato di una sottrazione si chiama *resto* o *differenza;* i numeri sui quali si opera vengono detti *termini* della sottrazione. Il numero maggiore di una sottrazione è chiamato *diminuendo*, il minore *diminutore;* la differenza si chiama anche *eccesso* del numero maggiore sul minore.

Per trovar la differenza di due numeri qualunque fa d'uopo sapere a memoria le differenze dei numeri di una sola cifra, come pure le differenze fra un numero di una sola cifra ed un numero maggiore, che

non lo superi di dieci unità. Questi risultati sono, in sostanza, identici a quelli che si debbono sapere a memoria per fare le addizioni; per esempio, sapendo che 7 e 5 fanno 12, si sa pure che 12 meno 5 fa 7.

Principî sui quali è fondata la teoria della sottrazione

23. Il ragionamento che conduce alla regola di sottrazione è fondato sui seguenti principî.

1° *Se due numeri sono decomposti in uno stesso numero di parti, e tutte le parti del maggiore sorpassano le parti corrispondenti del minore, la differenza dei due numeri potrà ottenersi sommando le differenze delle parti corrispondenti.*

Esempio. 8 sorpassa 5 di 3 unità, e 11 sorpassa 7 di 4 unità. La somma $8+11$ sorpassa $5+7$ di $3+4$ o di 7 unità.

2° *La differenza di due numeri non cambia aggiungendo ad ambedue numeri eguali.*

I due principî precedenti appartengono a quelli che si renderebbero men chiari cercando spiegarli.

Sottrazione di due numeri

24. Il primo principio basta, quando tutte le cifre del numero maggiore sorpassano le cifre corrispondenti del minore. Sia in fatti da sottrarre 421103 da 783214; scriviamo il diminutore al disotto del diminuendo in guisa che le cifre, che esprimono unità dello stess' ordine, si corrispondano sopra una medesima linea verticale:

$$\begin{array}{r} 783214 \\ 421103 \\ \hline 362111 \end{array}$$

si toglierà successivamente ciascuna cifra del diminutore da quella che si trova al disopra, e si otterranno le cifre della differenza; giacchè, operando a questo modo, si toglie evidentemente ciascuna parte del numero minore dalla parte corrispondente del maggiore, e si riuniscono i risultati di queste sottrazioni.

Allorchè la condizione precedente non è soddisfatta, l'operazione è alquanto meno semplice; sia da sottrarre 27513 da 31274; scriviamo al solito il diminutore al disotto del diminuendo, in guisa che le cifre esprimenti unità dello stesso ordine stiano sulla stessa linea verticale:

$$\begin{array}{r} 31274 \\ 27513 \\ \hline 3761 \end{array}$$

diremo: sottraendo 3 unità da 4 unità, resta 1 unità; sottraendo 1 decina da 7 decine, restano 6 decine; 5 centinaia da 2 centinaia non possono togliersi; aggiungeremo allora 10 centinaia al numero superiore, e diremo: togliendo 5 centinaia da 12 centinaia restano 7 centinaia.

Pel secondo principio, affinchè la differenza non sia mutata, fa d'uopo aggiungere 10 centinaia o un migliaio al numero inferiore; quindi continueremo l'operazione come se questo numero avesse per cifra delle migliaia 8. Diremo: 8 migliaia non si possono togliere da 1 migliaio, dunque aggiungiamo 10 migliaia al diminuendo ed allora togliendo 8 migliaia da 11 migliaia, restano 3 migliaia.

Poichè si è di nuovo aumentato il numero superiore, dobbiamo aumentare d'altrettanto il numero inferiore, e a quest'oggetto basterà continuare l'operazione, come se la cifra delle decine di migliaia del di-

minutore fosse 3. Questa cifra 3 tolta da 3, dà per resto 0, in guisa che la differenza è 3761.

OSSERVAZIONE. Nel ragionamento precedente abbiamo supposto che i due numeri avessero un egual numero di cifre; quando ciò non fosse, si dovrebbero sostituire le cifre mancanti alla sinistra del numero minore con zeri, che però in pratica non si scrivono, perchè inutili.

Quindi potremo enunciare la regola seguente:

25. *Per fare la sottrazione di due numeri interi si scrive il minore sotto al maggiore, in guisa che le unità dello stess' ordine si corrispondano sulla stessa linea verticale; poi si toglie ciascuna cifra inferiore da quella ch' è posta al disopra, cominciando dalla destra; se una di queste sottrazioni è impossibile, si aggiungono dieci unità alla cifra superiore; ma allora si continua l' operazione come se la cifra seguente del numero da sottrarre fosse maggiore di una unità. I risultati di queste diverse sottrazioni sono le cifre della differenza cercata.*

26. Talora, per fare una sottrazione, si procede in un modo alquanto differente, nel quale taluni trovano vantaggio.

Sia da sottrarre 27513 da 31274:

$$\begin{array}{r} 31274 \\ 27513 \\ \hline 3761 \end{array}$$

se il resto fosse noto, aggiungendolo a 27513 si dovrebbe ottenere 31274; questa considerazione è sufficiente per trovare successivamente le sue differenti cifre cominciando da quella delle unità.

La cifra delle unità aggiunta a 3 deve dare per somma 4 o 14; poichè la somma non può essere 14, (giacchè la cifra cercata dovrebbe essere eguale a 11), dev'essere 4. Per conseguenza la cifra delle unità è eguale a 1.

1 e 3 fanno 4; quindi nell'addizione di 27513 col resto ignoto non si riporta nulla in questa prima operazione.

La cifra delle decine del resto, aggiunta a 1, deve dare per somma 7 o 17, e poichè la somma non può essere 17, (perchè altrimenti la cifra cercata dovrebbe essere eguale a 16), sarà 7, e la cifra delle decine del resto è, per conseguenza, 6.

6 e 1 fanno 7, quindi nell'addizione di 27513 col resto ignoto non si riporta nulla alla terza colonna.

La cifra delle centinaia del resto, aggiunta a 5, deve dare per somma 2 o 12; la somma non può evidentemente essere eguale a 2, fa d'uopo dunque che sia 12 e, per conseguenza, la cifra delle centinaia è 7.

7 e 5 fanno 12; dunque, nell'addizione di 27513 col resto ignoto, si avrà 7 come cifra delle centinaia e si dovrà riportare un migliaio.

La cifra delle migliaia del resto, aggiunta a 7 ed al migliaio ch'è stato riportato, deve dare per somma 1 o 11. La somma, non potendo evidentemente essere 1, fa d'uopo che sia 11 e, per conseguenza, la cifra delle migliaia è 3.

3 e 7 fanno 10 e 1 che si è portato 11; bisognerà dunque, nell'addizione di 27513 col resto ignoto, porre 3 come cifra delle migliaia e riportare 1.

Finalmente la cifra delle decine di migliaia del resto, aggiunta a 2 ed alla decina di migliaia che è stata riportata, deve dare 3 per somma; dunque la cifra è 0, e il resto cercato è 3761.

Ecco come fa d' uopo parlare eseguendo l' operazione a questo modo:

$$
\begin{array}{r}
31274 \\
27513 \\
\hline
3761
\end{array}
$$

3 e **1** fanno 4 (dopo aver detto ciò, si scrive la cifra 1); 1 e 6 fanno **7** (si scrive allora la cifra 6); **5** e **7** fanno 12, pongo 2 e riporto 1 (si scrive allora la cifra 7); **7** e 1 che ho portato 8, 8 e 3 fanno 11, pongo 1 e riporto 1 (si scrive la cifra 3); **2** e 1 che ho portato **3**, 3 e 0 fanno **3**. L' operazione è terminata.

Per fare agevolmente uso di questo processo, fa d' uopo esser ben familiari con le addizioni dei numeri di una sola cifra, perchè, conoscendo uno di essi e la somma che si vuole avere, il nome dell' altro si presenta subito alla mente; è in questo caso solamente che si potrà addizionare il resto col diminutore, anche prima che il resto sia scritto.

Prova della sottrazione

27. Per verificare una sottrazione fa d' uopo aggiungere il resto al diminutore; il risultato di questa addizione dev' essere eguale al diminuendo.

Al modo stesso che l' addizione serve di prova alla sottrazione, la sottrazione può servire di prova all' addizione. In effetto, perchè un' addizione sia esatta, fa d' uopo che togliendo dalla somma ottenuta uno dei due numeri addizionati si ottenga per resto l' altro numero.

Sottrazione di una differenza

28. Teorema. *Per togliere da un numero la differenza di due altri, bisogna toglierVi il diminuendo ed aggiungere al risultato il diminutore.*

Debbasi, per esempio, sottrarre $10 - 3$ da 15: si potrà prima sottrarre da 15 il diminuendo 10 ed al resultato aggiungere poi il diminutore 3: perchè infatti da 15 togliendo 10 unità si tolgono 3 unità di troppo ed il resto viene impiccolito di queste 3 unità; e diviene per conseguenza esatto, se gli si aggiungono 3 unità. Dimodochè abbiamo

$$15 - (10 - 3) = 15 - 10 + 3.$$

* Si può dimostrare questa proprietà anche nel modo seguente: la differenza fra i due numeri 15 e $10 - 3$ non cambia (**23**), aggiungendo ad ambedue i termini di essa 3 unità, vale a dire sottraendo 10 da $15 + 3$. Quindi

$$15 - (10 - 3) = 15 + 3 - 10 = 15 - 10 + 3.$$

Queste dimostrazioni sono generali, perchè non dipendono affatto dalla scelta particolare dei numeri 10 e 3.

Esercizî

I. Per sottrarre due numeri l'uno dall'altro, per es.: 78324 da 92143, si può procedere nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 92143 \\ 78324 \\ \hline 13819 \end{array}$$

Operate come se si trattasse di una addizione, sostituendo alla cifra delle unità del diminutore ciò che le manca per essere eguale a dieci, e alle altre le loro differenze da nove, e sopprimendo dal resultato la cifra 1 che si trova necessariamente alla sinistra. Così, nell'esempio precedente, si dirà 6 e 3 fanno 9; 7 e 4, 11, scrivo 1 e riporto 1; 6 e 1, 7, e 1 riportato, 8; 1 e 2, 3; 2 e 9, 11 che scrivo, e cancello, secondo la regola, l'ultima cifra 1.

II. Per addizionare due numeri si può procedere come se si trattasse di una sottrazione, sostituendo alla cifra delle unità di uno dei numeri ciò che le manca per essere eguale a 10, e alle altre ciò che manca loro per essere eguali a 9, ed aumentando il secondo numero di una unità dell'ordine immediatamente superiore a quello che esprime l'ultima cifra del primo. Così per addizionare 3752 e 8796, si toglierà 1204 da 13752.

III. Quando si addizionano molti numeri, la somma delle cifre del resultato è superata dalla somma totale delle cifre dei numeri aggiunti, di un numero esatto di volte 9.

IV. Aggiungendo la somma di due numeri alla loro differenza, si ottiene per resultato il doppio del maggiore; e togliendo la differenza di due numeri dalla loro somma, si ottiene per resultato il doppio del minore.

V. Trovare tre numeri tali che la somma dei due primi sia 12, quella dei due ultimi 16, e quella del primo e dell'ultimo 14.

VI. Provare che aggiungendo 11 ad un numero, la differenza tra la somma delle cifre di posto impari cominciando dalla destra, e la somma delle cifre di posto pari, non può essere cambiata che di un numero esatto di volte 11, ed enumerare i differenti casi che possono presentarsi.

VII. Il primo di quattro numeri è 38642; il secondo supera il primo di 5270; il terzo supera il secondo di 18642; ed il quarto è eguale alla somma dei primi tre. Quali sono i quattro numeri, ed a quanto ascende la loro somma?

VIII. Sei persone si son divise una certa somma nel modo seguente: la prima ha avuto L. 26482; la seconda quanto la prima e la quarta insieme; la terza quanto la seconda e la sesta; la quarta ha avuto L. 12180; la quinta quanto la terza e la quarta; e la sesta 8462 lire. Si vuol sapere qual'è la somma divisa, e la parte di ciascuna persona.

IX. Il minore di due numeri è 2136, e, togliendo 1247 del numero maggiore, il resto ottenuto supera ancora il numero minore di 1807 unità. Qual'è il numero maggiore?

X. Aggiungendo ad un certo numero 24532 unità, e togliendo dal resultato 19684 unità, si ottiene 53486. Qual'é il numero incognito.

XI. Con L. 1247 di più di quelle che ora posseggo potrei pagare un debito di L. 4560 e mi resterebbero ancora 143 lire. Qual somma posseggo attualmente?

XII. Tre persone A, B e C posseggono fra tutte L. 1640. A e C hanno fra tutti e due L. 1100 e B e C L. 1220. Si domanda qual somma possiede ciascuna persona.

CAPITOLO III

MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI INTERI

Definizioni

29. Allorchè una quantità si addiziona con se stessa un numero intero di volte, si dice che si *moltiplica* per questo numero intero. La quantità riceve allora il nome di *moltiplicando*, ed il resultato è il suo *prodotto* per il numero intero che ha servito da *moltiplicatore*.

Esempio. Cinque volte 12 mesi, ovvero 60 mesi, è il prodotto del moltiplicando 12 mesi, pel moltiplicatore cinque.

In Aritmetica il moltiplicando è pure rappresentato da un numero, e si cerca il numero che rappresenta il prodotto. Il moltiplicando ed il moltiplicatore si chiamano i *fattori del prodotto;* si dice anche che il prodotto è un *multiplo del moltiplicando;* in generale, chiamansi *multipli di un numero*, o di una *quantità*, i prodotti ottenuti moltiplicando questo numero, questa quantità, per un numero intero qualunque.

Esempio. I multipli di 3 sono 3, 6, 9, 12, 15, 18, ecc., cioè a dire, una volta 3, due volte 3, tre volte 3, ecc.

La moltiplicazione s'indica col segno $\times$ che si legge *moltiplicato per*.

Esempio. 5×7 si legge: 5 moltiplicato per 7.

I multipli di un numero, per esempio, di 3, si possono rappresentare in generale con $3 \times m$ essendo m un numero intero qualunque. Spesso ci gioveremo delle lettere dell'alfabeto per esprimere i numeri; ciò apporta molta semplicità nelle dimostrazioni.

Tavola di moltiplicazione

30. Per eseguire una moltiplicazione, fa d'uopo conoscere i prodotti di due numeri di una sola cifra: questi prodotti si trovano nella tavola seguente, nell'incontro delle linee orizzontali e verticali, in testa alle quali i fattori sono scritti.

Ciascuno dei numeri che si trovano in una linea verticale di questa tavola si ottiene aggiungendo al precedente quello col quale comincia la colonna; così di quest'ultimo si viene a formare successivamente il doppio, il triplo, il quadruplo, ecc., nella seconda, terza, quarta casella ecc., di quelle in cui viene scomposta la tavola, corrispondenti alla colonna in capo alla quale sta il numero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Questi resultati debbono impararsi a memoria, chè sarebbe impossibile eseguire i calcoli, se bisognasse ricorrere alla tavola ogni volta che si debbono moltiplicare due numeri di una sola cifra.

Principî sui quali si fonda la moltiplicazione

31. *Se il moltiplicando è la somma di più numeri, si otterrà il prodotto, moltiplicando successivamente ciascun d' essi pel moltiplicatore e addizionando i resultati.*

È evidente infatti che, se ripetiamo, per esempio, 3 volte ciascuna delle parti che compongono un numero, il numero stesso verrà ripetuto 3 volte. Così, se dobbiamo moltiplicare $2+4+7$ per 3, rammentando che per definizione la moltiplicazione è un' addizione di numeri eguali, si avrà evidentemente la relazione

$$(2+4+7)\times 3 = 2+4+7+2+4+7+2+4+7 =$$
$$= 2\times 3 + 4\times 3 + 7\times 3.$$

32. *Se il moltiplicatore è la somma di molti numeri, si otterrà il prodotto, moltiplicando successivamente il moltiplicando per ciascuno di essi ed addizionando i resultati.*

Giacchè si potrà, per esempio, ripetere un numero diciassette volte, ripetendolo dapprima dieci volte e poscia sette volte.

Esempio. 8 essendo eguale a 5 più 3, 8 volte 9 è evidentemente eguale a 5 volte 9 più 3 volte 9, cioè:

$$9\times(5+3) = 9\times 5 + 9\times 3$$

Infatti è facile verificare che

$$72 = 45 + 27.$$

33. *Il prodotto di due numeri interi non cambia invertendo i fattori.*

Siano i fattori 5 e 3; fa d'uopo provare che 5 volte 3 è uguale a 3 volte 5. Pel primo principio (**31**) si ha

$$3 \times 5 = (1 + 1 + 1) \times 5 = 5 + 5 + 5 = 5 \times 3:$$

eguaglianza che dimostra il terzo principio.

34. *Per moltiplicare un numero intero per* 10, 100, 1000, ecc., *basta scrivere uno, due, tre..., zeri alla sua destra.*

In effetto è evidente che, operando a questo modo, si renderà il valore rappresentato da ciascuna cifra, 10, 100, 1000... volte più grande.

Esempio. Il prodotto di 3752 per 100000 è 375200000.

Moltiplicazione di un numero qualunque per un moltiplicatore di una sola cifra

35. Sia da moltiplicare 7283 per 5.

Il numero 7283 si può considerare come la somma di 3 unità più 8 decine più 2 centinaia più 7 migliaia; quindi (**31**) bisogna ripetere cinque volte ciascuna di queste parti; ciò che può effettuarsi agevolmente mediante la tavola della moltiplicazione. In effetto:

5 volte 3 unità fanno 15 unità.
5 volte 8 decine fanno 40 decine.
5 volte 2 centinaia fanno 10 centinaia.
5 volte 7 migliaia fanno 35 migliaia.

Nella pratica si aggiungono questi prodotti parziali a misura che si ottengono. Così nell'esempio precedente si dirà:

$$\begin{array}{r} 7283 \\ 5 \\ \hline 36415 \end{array}$$

5 volte 3 unità fanno 15 unità; si pongono 5 unità e si riporta una decina. 5 volte 8 decine fanno 40 decine, che aggiunte alla decina del prodotto precedente danno 41 decine; si scrive una decina e si portano 4 centinaia. 5 volte 2 centinaia fanno 10 centinaia, e 4 riportate, 14 centinaia; si scrivono 4 centinaia e si porta 1 migliaio. 5 volte 7 migliaia fanno 35 migliaia, e 1 riportato, 36 migliaia, che si scrivono alla sinistra delle tre prime cifre ottenute, ciò che dà per prodotto 36415.

Moltiplicazione di un numero qualunque per una cifra significativa seguìta da uno o più zeri

36. Abbiasi da moltiplicare 7283 per 500. Si ha

$$7283 \times 500 = 7283 \times (5 + 5 + 5 + \ldots\ldots);$$

ove il 5 contenuto nella parentesi dev'essere ripetuto cento volte; quindi

$$7283 \times 500 = 7283 \times 5 + 7283 \times 5 + 7283 \times 5 + \ldots\ldots$$

ove il prodotto 7283×5 è ripetuto **cento** volte; cioè a dire

$$7283 \times 500 = 36415 \times 100 = 3641500.$$

Possiamo dunque enunciare la regola seguente.

Per moltiplicare un numero qualunque per una cifra significativa seguìta da uno o più zeri, si moltiplica per questa cifra, considerata come rappresentante unità semplici, e si scrivono alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono alla destra del moltiplicatore.

Moltiplicazione di due numeri qualunque

37. Sia da moltiplicare 375 per 286. Per ripetere 375, 286 volte, basta (**32**) ripeterlo successivamente 6 volte, 80 volte e 200 volte, ed addizionare i resultati. Ciascuna di queste moltiplicazioni parziali rientra in uno dei due casi precedenti e non richiede nuove spiegazioni; possiamo quindi enunciare la regola seguente.

Per fare il prodotto di due numeri interi si moltiplica successivamente il moltiplicando per ciascuna delle cifre del moltiplicatore, e si addizionano i resultati, dopo aver posto alla destra di ciascuno di essi un numero di zeri eguale al numero delle cifre che precedono il moltiplicatore da cui proviene.

Nella pratica si fa a meno di scrivere gli zeri, limitandoci a dare alle cifre dei prodotti parziali il posto che occuperebbero dopo l'addizione di questi zeri.

Esempio:

```
    375
    286
   ----
   2250
  3000
  750
 ------
 107250
```

Prodotti di molti fattori

38. Dicesi *prodotto di più fattori* il resultato che si ottiene moltiplicando due primi numeri fra loro, il resultato ottenuto per un terzo numero, questo resultato per un quarto numero, e così di seguito.

Esempio. $2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6$ significa: il prodotto di 2 per 3, che è 6, moltiplicato per 5, che fa 30; il

nuovo resultato moltiplicato per 4 che dà 120, e infine quest'ultimo resultato moltiplicato per 6 che dà 720.

Quadrati e potenze

39. Il prodotto di un numero per sè stesso si chiama il suo *quadrato* o la sua *potenza seconda*. Se il numero è preso 3 volte come fattore, il prodotto si chiama *cubo* o *terza potenza;* se un numero si prende 4, 5, 6,... volte come fattore, il prodotto si chiama *quarta*, *quinta*, *sesta*,... *potenza di questo numero*. In generale dunque, *potenza di un numero* è un prodotto di più fattori tutti eguali a quel numero.

Esempio. Nel nostro sistema di numerazione, le unità dei diversi ordini, dieci, cento, mille, ecc., sono le successive potenze della base dieci.

Per scrivere una potenza di un numero, si scrive il numero ed in alto alla sua destra in carattere più piccolo il numero di volte che deve essere preso come fattore, il qual numero si chiama l'*esponente della potenza:* il numero da elevarsi a potenza dicesi *base*.

Esempio. 10^3, significa 10 a cubo, o 1000; 3 è l'esponente e 10 è la base.

Teoremi relativi alla Moltiplicazione

40. Teorema I. *Un prodotto non cambia valore invertendo i fattori.*

Comecchè la dimostrazione di questo teorema sia stata già data (33) pel caso di due fattori, noi la riproduciamo, a fine di riunire tutto ciò che è relativo a questa importante proposizione.

1° *Un prodotto di due fattori non cambia valore invertendo i fattori.*

Siano i fattori 5 e 3; fa d'uopo provare che 5 volte 3 è eguale a 3 volte 5.

Si ha

$$3 \times 5 = (1 + 1 + 1) \times 5 = 5 + 5 + 5 = 5 \times 3.$$

2° *Un prodotto non cambia valore invertendo i due primi fattori.*

Sia il prodotto $5 \times 7 \times 8 \times 9$; fa d'uopo provare che è eguale a $7 \times 5 \times 8 \times 9$. Ora per effettuare la prima operazione bisogna moltiplicare 5 per 7, il prodotto per 8 e il nuovo prodotto per 9. Per effettuare la seconda bisogna moltiplicare 7 per 5, il prodotto per 8 ed il nuovo prodotto per 9; ciò che è assolutamente la medesima cosa, poichè 5 moltiplicato per 7 è eguale a 7 moltiplicato per 5.

3° *Un prodotto di tre fattori non cambia valore invertendo i due ultimi.*

Sia il prodotto $12 \times 5 \times 3$; bisogna provare che è uguale a $12 \times 3 \times 5$. Ciò risulta ancora dal teorema relativo al caso di due fattori, in virtù del quale 5×3 è eguale a 3×5; in effetto questa eguaglianza significa che 3 volte 5 *unità* valgono 5 volte 3 *unità*. La parola unità indicando qui una grandezza affatto arbitraria, potremo prendere per essa una collezione di dodici oggetti, o una *dozzina;* e per conseguenza

3 volte 5 dozzine valgono 5 volte 3 dozzine;

ciò ch'è la traduzione in linguaggio ordinario dell'eguaglianza che vogliamo provare,

$$12 \times 5 \times 3 = 12 \times 3 \times 5;$$

giacchè il primo membro di questa eguaglianza esprime

cinque dozzine ripetute tre volte, e il secondo tre dozzine ripetute cinque volte (*a*).

4° *Un prodotto non cambia valore invertendo i due ultimi fattori.*

Si ha il prodotto $3 \times 7 \times 8 \times 9 \times 5 \times 4$; bisogna provare che è eguale a $3 \times 7 \times 8 \times 9 \times 4 \times 5$.

Per formare questi due prodotti bisognerebbe cominciare, nei due casi, dal moltiplicare 3 per 7, il prodotto per 8 e il nuovo prodotto per 9. Senza effettuare queste operazioni, indichiamone il resultato con una lettera P; per compiere il primo prodotto fa d'uopo moltiplicare P per 5 e il prodotto per 4; per compiere il secondo bisogna moltiplicare P per 4 e il prodotto per 5, ciò ch'è la medesima cosa, poichè, in virtù del teorema precedente, si ha

$$P \times 5 \times 4 = P \times 4 \times 5.$$

5° *Un prodotto non cambia valore invertendo due fattori consecutivi.*

Sia il prodotto $3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 4 \times 5 \times 6$. Fa d'uopo provare che è uguale a

$$3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 4 \times 11 \times 5 \times 6.$$

Secondo la proposizione precedente si ha

$$3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 4 = 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 4 \times 11.$$

Se questi due numeri eguali si moltiplicano per 5 e i resultati ottenuti per 6, i prodotti saranno evidentemente eguali, e per conseguenza

$$3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 4 \times 5 \times 6 = 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 4 \times 5 \times 6;$$

ciò che bisognava dimostrare.

(*a*) Questo teorema può dimostrarsi ancora nel seguente modo:

$$12 \times 3 \times 5 = 12 \times (1 + 1 + 1) \times 5 = (12 + 12 + 12) \times 5$$
$$= 12 \times 5 + 12 \times 5 + 12 \times 5 = 12 \times 5 \times 3.$$

T.

6° *Dimostriamo in fine, che in un prodotto di più fattori si può cambiare in un modo qualunque l'ordine de' fattori senza alterare il valore del prodotto.*

È permesso (5°) invertire due fattori consecutivi. Ora, mediante una serie d'inversioni di questo genere, si potranno ridurre i fattori a succedersi in quell'ordine che si vorrà. In effetto, si potrà scegliere uno qualunque tra essi e portarlo nel primo posto, cambiandolo successivamente di posto con quelli che si troveranno alla sua sinistra. Ciò fatto, si potrà scegliere un secondo fattore e portarlo al modo stesso al secondo posto, poi un terzo, che si farà pervenire al terzo posto, e così di seguito, sino a che si trovino posti nell'ordine assegnato.

41. Teorema II. *Per moltiplicare un numero per il prodotto di più fattori, si può moltiplicarlo successivamente per questi diversi fattori.*

Sia da moltiplicare il numero 13 pel prodotto $2 \times 3 \times 5$, che è eguale a 30; si ha

$$13 \times 30 = 30 \times 13.$$

Nel prodotto 30×13 si può sostituire 30 con $2 \times 3 \times 5$; giacchè, per definizione, per effettuare $2 \times 3 \times 5 \times 13$, bisognerà dapprima formare il prodotto $2 \times 3 \times 5$ ovvero 30, e moltiplicarlo per 13; si ha dunque

$$30 \times 13 = 2 \times 3 \times 5 \times 13,$$

ovvero, cambiando l'ordine dei fattori nel secondo membro,

$$30 \times 13 = 13 \times 2 \times 3 \times 5;$$

e poichè $$30 \times 13 = 13 \times 30,$$

sarà pure $$13 \times 30 = 13 \times 2 \times 3 \times 5,$$

ciò che bisognava dimostrare.

42. Osservazione I. *Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei suoi fattori per questo numero.* Abbiamo veduto in effetto che

$$(2 \times 3 \times 5) \times 13 = 13 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Ma il secondo membro può scriversi

$$(13 \times 2) \times 3 \times 5,$$

e, per conseguenza, per moltiplicare il prodotto $2 \times 3 \times 5$ per 13, è stato sufficiente moltiplicare uno dei suoi fattori per 13.

43. Osservazione II. *Si può moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, formando un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e quelli del moltiplicatore.*

Sia da moltiplicare $5 \times 7 \times 4$ per $8 \times 5 \times 3$.

Per moltiplicare un numero pel prodotto $8 \times 5 \times 3$ basta (41) moltiplicarlo successivamente per tutti i fattori di questo prodotto; si ha dunque

$$(5 \times 7 \times 4) \times (8 \times 5 \times 3) = (5 \times 7 \times 4) \times 8 \times 5 \times 3;$$

la parentesi nel secondo membro non mutando in nulla il significato delle operazioni indicate, si può sopprimerla e scrivere

$$(5 \times 7 \times 4) \times (8 \times 5 \times 3) = 5 \times 7 \times 4 \times 8 \times 5 \times 3;$$

ciò che bisognava dimostrare.

La dimostrazione precedente è fondata sulla considerazione che l'espressione $(5 \times 7 \times 4) \times 8 \times 5 \times 3$ ha assolutamente lo stesso significato avanti e dopo la soppressione della parentesi; non sarà inutile insistere su questo particolare.

$$(5 \times 7 \times 4) \times 8 \times 5 \times 3$$

significa il prodotto effettuato, $5 \times 7 \times 4$, moltiplicato per 8, poscia il resultato per 5, ed infine il resultato per 3.

$$5 \times 7 \times 4 \times 8 \times 5 \times 3,$$

significa, 5 moltiplicato per 7, il resultato moltiplicato per 4 (ciò che dà il prodotto $5 \times 7 \times 4$), poscia il resultato per 8, poi il nuovo resultato per 5, e infine l'ultimo resultato per 4. Si vede che le due operazioni sono identicamente le stesse.

44. Osservazione III. *In un prodotto si può sostituire ad un numero qualunque di fattori il loro prodotto effettuato.*

L'ordine dei fattori potendo essere qualunque, supponiamo che quelli di cui si tratta siano i primi; allora è evidente che le operazioni da fare non mutano, sostituendo a questi fattori il loro prodotto effettuato. Così, per es., sostituendo al prodotto $5 \times 7 \times 9 \times 13 \times 11$ l'altro $315 \times 13 \times 11$, (315 è uguale a $5 \times 7 \times 9$), non si altera in verun conto l'operazione da eseguire. Giacchè per effettuare il prodotto proposto fa d'uopo, per definizione, moltiplicare 5 per 7, poi il prodotto per 9, ciò che dà 315; poscia questo numero 315 si deve moltiplicare per 13 ed il resultato per 11; operazione che dà lo stesso resultato, che si ottiene effettuando il prodotto $315 \times 13 \times 11$.

45. Osservazione IV. *Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero, è sufficiente scrivere il numero, dandogli per esponente la somma degli esponenti dei fattori.*

Si debba moltiplicare 2^3 per 2^4, cioè a dire $2 \times 2 \times 2$ per $2 \times 2 \times 2 \times 2$; per quest'oggetto basterà (Osservazione II) formare un prodotto unico coi fattori

del moltiplicando e quelli del moltiplicatore. Ora questo prodotto è $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ovvero 2^7.

46. OSSERVAZIONE V. *Per moltiplicare due numeri terminati da zeri, si possono sopprimere questi zeri, far poscia la moltiplicazione, e scrivere alla destra del prodotto tanti zeri, quanti se ne sono soppressi nei due fattori.*

Sia da moltiplicare 378000 per 2700, cioè a dire 378×10^3 per 27×10^2; si ha

$$(378 \times 10^3) \times (27 \times 10^2) = 378 \times 10^3 \times 27 \times 10^2 =$$
$$= 378 \times 27 \times 10^3 \times 10^2 = 378 \times 27 \times 10^5.$$

10^5 essendo eguale a 100000, si vede (**34**) che, per formare il prodotto richiesto, è sufficiente moltiplicare 378 per 27 e scrivere 5 zeri alla destra del resultato, ottenendo così per prodotto 1020600000.

Moltiplicazione di una somma per una somma

47. Sia da moltiplicare $9 + 4$ per $7 + 5$. Bisogna ripetere il moltiplicando $7 + 5$ volte, ciò che può farsi ripetendolo 7 volte, poi 5 volte, e aggiungendo i resultati. Ma per moltiplicare una somma $9 + 4$ per un numero basta moltiplicare ciascuna delle sue parti per questo numero e addizionare i prodotti parziali (**31**); dunque il prodotto richiesto si compone di 7 volte 9 più 7 volte 4, più 5 volte 9, più 5 volte 4, il che scrivesi così:

$$(9 + 4) \times (7 + 5) = 9 \times 7 + 4 \times 7 + 9 \times 5 + 4 \times 5$$

(a) Quindi, *per moltiplicare una somma per una somma,* basta ~~*fa d'uopo*~~ *moltiplicare ciascuna delle parti del moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore ed addizionare i prodotti parziali ottenuti.*

Moltiplicazione
di una differenza per un numero qualunque

48. Debbasi moltiplicare la differenza 17 — 4 per 5; ciò è lo stesso (**33**) che moltiplicare 5 per 17 — 4. Ma per questo basta ripetere il 5 prima 17 volte, poi 4 volte, e sottrarre i risultati; quindi

$$(17-4)\times 5=17\times 5-4\times 5;$$

dunque, *per moltiplicare una differenza per un numero qualunque, basta moltiplicare i suoi due termini per questo numero e sottrarre i prodotti parziali.*

Applicazione. Sia da moltiplicare 7997 per 8; si ha

$$7997=8000-3.$$

Per conseguenza

$$7997\times 8=(8000-3)\times 8=64000-24=63976.$$

48*. Questo teorema può dimostrarsi ancora nel seguente modo.

È chiaro che

$$5\times(17-4)=5\times 13.$$

Ora si ha

$$5\times 17=5\times(13+4)$$

ossia (**32**) $$5\times 17=5\times 13+5\times 4;$$

ma da due numeri eguali si può togliere uno stesso numero senza alterare l' eguaglianza; quindi togliendo dai due membri dell' ultima eguaglianza 5×4, avremo

$$5\times 17-5\times 4=5\times 13=5\times(17-4).$$

E in generale, facendo $b - c = d$, si ha

$$a \times (b - c) = a \times d,$$

e

$$a \times b = a \times (d + c)$$

$$\text{ossia } a \times b = a \times d + a \times c;$$

da cui, togliendo da ambedue i membri $a \times c$,

$$a \times b - a \times c = a \times d = a \times (b - c).$$

48**. In virtù di quest'ultimo teorema e dei principî fondamentali della moltiplicazione (**31, 32**), si vede che all'espressione

$$5 \times 9 - 5 \times 6 + 5 \times 12 - 5 \times 7$$

si può dare l'altra forma, sovente più utile,

$$5 \times (9 - 6 + 12 - 7).$$

Infatti quest'ultima espressione può scriversi ancora nel seguente modo:

$$5 \times (9 + 12 - 6 - 7) = 5 \times [(9 + 12) - (6 + 7)];$$

ho scritto $(9 + 12)$ e $(6 + 7)$ per significare che bisogna fare prima la somma di 9 e 12, poi la somma di 6 e 7, e quindi sottrarre dalla prima somma la seconda.

Ora per l'ultimo teorema si ha

$$5 \times [(9 + 12) - (6 + 7)] = 5 \times (9 + 12) - 5 \times (6 + 7) =$$
$$= 5 \times 9 + 5 \times 12 - 5 \times 6 - 5 \times 7,$$

risultato affatto identico all'espressione proposta.

Numero delle cifre di un prodotto

49. Teorema III. *Il numero delle cifre di un prodotto di due fattori è uguale alla somma del numero*

delle cifre del moltiplicando e del numero delle cifre del moltiplicatore, od a questa somma diminuita di una unità.

Supponiamo che il moltiplicando abbia cinque cifre, e sia per esempio 35178, e che il moltiplicatore abbia tre cifre.

Poichè il moltiplicatore ha tre cifre, è al meno eguale a 100; il prodotto è dunque per lo meno eguale a quello del moltiplicando per 100, ossia al moltiplicando seguito da due zeri (**34**), cioè 3517800; e per conseguenza il numero delle sue cifre è almeno eguale alla somma del numero delle cifre dei due fattori diminuita di un' unità.

D' altra parte il moltiplicatore, avendo tre cifre, è certo minore di 1000; dunque il prodotto è minore del moltiplicando seguito da tre zeri, cioè di 35178000; per conseguenza il numero delle cifre del prodotto non può sorpassare la somma del numero delle cifre dei fattori.

49*. *L' ordine delle unità del prodotto è lo stesso che quello delle unità del moltiplicando.*

Infatti si ha, per esempio,

$$2400 \times 3 = 24 \times 100 \times 3 = 24 \times 3 \times 100 = 72 \times 100;$$

dunque il moltiplicando 24 centinaia ripetuto 3 volte, dà per prodotto 72 centinaia.

Metodo abbreviato per fare la moltiplicazione

50. Per moltiplicare due numeri si fa spesso uso di un processo, che permette di scrivere immediatamente il prodotto definitivo, senza formare i prodotti parziali intermedî.

Abbiasi, per esempio, da moltiplicare 375 per 286; bisogna, secondo la regola esposta innanzi, moltiplicare successivamente il moltiplicando per 6, per 80, e per 200, ed a tal fine si debbono moltiplicare successivamente per ciascuno di questi tre numeri, le tre parti 300, 70 e 5, di cui si compone il moltiplicando. Quindi bisogna eseguire in tutto nove moltiplicazioni parziali, cioè quelle dei tre moltiplicandi 300, 70 e 5 pei tre moltiplicatori 200, 80, 6. A tal fine basterà (47) moltiplicare 3, 7 e 5 per 2, 8 e 6, scrivendo alla destra di ciascun prodotto tanti zeri, quanti ve ne dovevano essere dopo i due fattori moltiplicati, cioè a dire, un numero di zeri eguale al numero delle cifre poste dopo di essi nei due numeri proposti. Giovandosi di quest' osservazione, è molto facile formare successivamente i prodotti che rappresentano unità semplici, quelli che rappresentano decine, quelli che rappresentano centinaia, ecc., e di aggiungerli a misura che si ottengono. Così nell' esempio che consideriamo:

$$\begin{array}{r} 375 \\ 286 \\ \hline 107250 \end{array}$$

è chiaro che, tra i nove prodotti che dobbiamo formare, un solo può rappresentare unità semplici, ed è quello delle unità del moltiplicando per le unità del moltiplicatore. 6 volte 5 fanno 30. La cifra delle unità del prodotto è dunque 0 e dobbiamo riportare 3 decine. Due dei prodotti parziali rappresentano decine, e sono quelli ottenuti dalle unità moltiplicate per le decine, e dalle decine moltiplicate per le unità. 7 volte 6, 42; 8 volte 5, 40; 40 e 42 fanno 82, e 3 decine, che sono state riportate, 85 decine; la cifra delle decine è dunque 5, e si debbono riportare 8 centinaia.

Tre dei prodotti parziali rappresentano centinaia, e son quelli ottenuti dalle unità moltiplicate per le centinaia, dalle decine per le decine e dalle centinaia per le unità. 6 volte 3 fanno 18; 8 volte 7, 56; 2 volte 5, 10; 10, 56 e 18 fanno 84, e 8 centinaia riportate 92. Dunque la cifra delle centinaia è 2, e fa d'uopo riportare 9 migliaia.

Due dei prodotti parziali rappresentano migliaia, e son quelli ottenuti dalle decine moltiplicate per le centinaia e dalle centinaia moltiplicate per le decine. 8 volte 3 fanno 24, 2 volte 7 fanno 14; 14 e 24 fanno 38, e 9 migliaia riportate 47; dunque la cifra delle migliaia è 7, e bisogna riportare 4 decine di migliaia.

Un solo prodotto dà decine di migliaia, ed è quello delle centinaia per le centinaia. 2 volte 3 fanno 6, e 4 riportate 10, quindi la cifra delle decine di migliaia è 0, e si ha di più un centinaio di migliaia.

Osservazione. È sempre agevole trovare tutti i prodotti che rappresentano unità di un dato ordine. A tale scopo si comincierà dal cercare quello tra essi che corrisponde alle unità dell'ordine più elevato del moltiplicando; tutti gli altri, che danno unità dello stesso ordine, si otterranno poscia, osservando che l'ordine delle unità rappresentate dal prodotto non muta, avanzando allo stesso tempo di un posto verso la destra nel moltiplicando e di un posto verso la sinistra nel moltiplicatore.

Debbasi, per esempio, moltiplicare 783214 per 291573; cerchiamo i prodotti parziali che rappresentano decine di milioni. Le unità più elevate del moltiplicando sono centinaia di migliaia; per avere decine di milioni, fa d'uopo moltiplicarle per centinaia; quindi il primo dei prodotti domandati è 5×7. Gli altri sono 1×8, 9×3, 2×2; e la loro somma $35 + 8 + 27 + 4$ è eguale a 74. Però

non bisogna conchiudere che, nel prodotto, la cifra delle decine di milioni sia 4, giacchè il prodotto delle unità di milioni può aver dato altre decine da riportare.

Cerchiamo ancora i prodotti parziali che, nella moltiplicazione proposta, danno delle decine di migliaia; quello fra questi prodotti, che corrisponde alle unità di ordine più elevato del moltiplicando, è il prodotto delle decine di migliaia del moltiplicando per le unità del moltiplicatore, cioè a dire, 8×3; gli altri sono 3×7, 2×5, 1×1, 4×9.

Esercizi

I. Un numero terminato da 5 ha il suo quadrato terminato da 25.

II. La differenza delle quarte potenze di due numeri non terminati nè da 0 nè da 5 termina con una di queste due cifre.

III. Il prodotto di due numeri, compresi tra 5 e 10, si può trovare nel modo seguente: Chiudere nella mano sinistra tante dita, quante unità mancano al moltiplicando, perchè risulti uguale a 10. e nella mano destra tante quante ne mancano al moltiplicatore; fare il prodotto di questi due numeri di dita, e aggiungergli tante decine, quante dita sono rimaste non chiuse.

IV. Date due serie di numeri, che ne contengano tanti l'una quanti l'altra, in quale ordine fa d'uopo disporle, perchè la somma dei prodotti ottenuti, moltiplicando i numeri corrispondenti, sia la maggiore possibile?

V. Si prenda un numero qualunque di cifre. Si raddoppi la prima, si aggiunga 5 al risultato, e si moltiplichi la somma per 5; al prodotto così ottenuto si aggiunga la seconda cifra, poscia si moltiplichi per 10; si aggiunga al prodotto la terza cifra, si moltiplichi ancora per 10 e si aggiunga la quarta; così di seguito indefinitamente.

Provare che il risultato così ottenuto, diminuito di 25 o di 250, o di 2500......, secondo il numero delle cifre date, sarà eguale al numero formato da queste cifre, scritte nell'ordine nel quale erano state poste.

VI $\quad A \qquad\qquad R \qquad\quad S \qquad\qquad B$

Si segnino sopra una retta AB due punti R e S, e si misurino questa linea e le sue differenti parti: provare che si avrà sempre

$$(AB) \times (RS) + (AR) \times (BS) = (AS) \times (BR),$$

(AB), (RS), (AR), (BS), (AS), (BR), indicando i numeri che misurano questi differenti segmenti.

Esempio. $AB = 100$, $AR = 20$, $BS = 10$, $RS = 70$,
$$100 \times 70 + 20 \times 10 = 90 \times 80.$$

VII. Il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è eguale alla differenza dei loro quadrati.

VIII. Dedurre dal teorema precedente che, data la somma di due numeri, il loro prodotto è il massimo possibile quando sono eguali.

IX. Dato il prodotto di due numeri, la loro somma è la minima possibile, se sono eguali: mostrare l'identità di questa proposizione con la precedente.

X. La somma dei quadrati di due numeri è maggiore del doppio del loro prodotto.

XI. Il prodotto dei numeri interi dopo un limite qualunque n, sino al numero $2n - 2$ inferiore di due unità al doppio di n, è uguale al prodotto dei numeri impari da 1 sino a $2n - 3$, per la potenza $(n-1)^{\text{esima}}$ di 2.

XII. Una persona, che ha 25460 lire di rendita annua, spende L. 48 al giorno in media. Quanto avrà risparmiato in capo a 25 anni?

XIII. Una somma di denaro è stata divisa fra 60 persone; 12 di esse ebbero L. 324 per ciascuna; 27 ebbero

L. 108 per ciascuna e le altre 21 ebbero L. 96 per ciascuna. A quanto ammontava la somma divisa?

XIV. Due mobili partono contemporaneamente da due punti A e B posti sulla stessa retta, e vanno l'uno incontro all'altro. Il primo fa 28 metri ed il secondo 32 metri al minuto. Qual sarà la distanza, che li separa dopo 12 minuti di cammino, se la distanza fra i due punti di partenza A e B era di 960 metri?

XV. Due condotti che portano acqua in una vasca, v'immettono respettivamente 12 litri e 16 litri d'acqua al minuto. Un emissario porta via dalla vasca 15 litri d'acqua al minuto. Essendo la vasca vuota e lasciando aperti i due condotti e l'emissario, la vasca si empie in 8 ore e 25 minuti. Quanti litri d'acqua contiene la vasca?

CAPITOLO IV

DIVISIONE DEI NUMERI INTERI

Definizioni

51. La parola *divisione* esprime letteralmente riduzione in più parti. Dividere una grandezza per un numero intero vuol dire decomporla in tante parti eguali quante unità vi sono in questo numero, e valutare una di queste parti. In Aritmetica la grandezza da dividere è rappresentata da un numero che, in questo capitolo, supporremo intero; questo numero si chiama *dividendo*; quello, che esprime in quante parti eguali deve esser diviso, chiamasi *divisore*, ed il valore di una delle parti dicesi *quoziente*. L'oggetto della divisione è di trovare il quoziente, dati che siano il dividendo e il divisore.

La divisione s'indica col segno : che si legge *diviso per*.

Esempio. 8 : 3 si legge 8 diviso per 3.

52. Non sempre è possibile trovare un quoziente intero; in questo caso ci limiteremo, per ora, a cercare il più gran numero intero che vi è contenuto, rimettendo la sua valutazione esatta alla teorica delle frazioni. Se si considera questa parte intera del quoziente, come ottenuta dal dividere una parte del dividendo per il di-

visore, il *resto* è la parte non divisa. Per esempio, nella divisione di 10 per 4, la parte intera del quoziente che è 2 potendosi considerare come ottenuta dalla divisione di 8 per 4, ne segue che il *resto* è 2 unità.

53. Osservazione I. *Il resto di una divisione è sempre minore del divisore*, giacchè, se ciò non fosse, dividendolo per questo divisore, si otterrebbe almeno una nuova unità da aggiungere alla parte intera del quoziente. Così, non sarebbe conforme alle definizioni precedenti dire che 18 diviso per 5 dà per quoziente 2 e per resto 8 unità; giacchè 5 di queste 8 unità, divise per 5, danno per quoziente un'unità, che fa d'uopo aggiungere alle altre 2: si deve dire dunque che il quoziente è 3 ed il resto 3.

54. Osservazione II. La divisione di una grandezza in parti eguali non è il solo genere di questioni che conduca a fare delle divisioni. Questa operazione si presenta anche quando, per confrontare due grandezze, si cerca quante volte l'una contiene l'altra; allorchè le due grandezze sono espresse mediante numeri, è facile mostrare che questo modo di paragonarli torna alla divisione di due numeri.

Siano i numeri 46 e 7. Il quoziente della loro divisione è 6, e il resto 4, cioè a dire che 46 si compone di un numero che contiene sette parti eguali a 6, e di 4 unità. Ma un numero che contiene sette parti eguali a 6, è eguale a sette volte 6 o (**33**) a sei volte 7; quindi 46 contiene sei volte il divisore 7, e inoltre 4 unità; in guisa che cercando quante volte 46 contiene 7, si troverà lo stesso numero intero 6, che prendendo la settima parte di 46; e resterà la stessa parte del dividendo, cioè 4 unità, di cui la divisione non può effettuarsi in numeri interi.

Questa osservazione prova che si può considerare

la divisione, come un' operazione avente per oggetto di cercare quante volte il dividendo contiene il divisore; il *resto* è allora ciò che rimane del dividendo, quando se n' è tolto il divisore tante volte quante è possibile. Da ciò risulta, *che il prodotto del divisore per la parte intera del quoziente è il massimo multiplo del divisore che sia contenuto nel dividendo.*

Osservazione. Se la lunghezza dei calcoli non fosse un ostacolo, il quoziente della divisione di due numeri si otterrebbe facilmente mercè le operazioni precedenti.

Abbiasi da dividere 28 per 8. Il quoziente può ottenersi in tre modi:

1° Mediante l'addizione. Aggiungendo 8 a sè stesso si riconosce che $8+8+8=24$, e $8+8+8+8=32$; 28 contiene quindi 8 più di 3 volte, e meno di 4 volte. Il quoziente che si cerca è, per conseguenza, 3 e il resto è 4, eccesso di 28 sopra 24.

2° Mediante la sottrazione. Togliendo 8 da 28 tante volte quant'è possibile, si riconosce che vi è contenuto soltanto 3 volte.

$$28-8=20,\ 20-8=12,\ 12-8=4.$$

28 contiene quindi 3 volte 8, e si ha per resto 4.

3° Mediante la moltiplicazione. Moltiplicando successivamente 8 pei numeri 1, 2, 3, ecc.; si trovano per prodotti, 8, 16, 24, 32. Il più grande di questi numeri che sia contenuto in 28 è 24 o 3 volte 8; il quoziente è per conseguenza 3.

Quindi l'oggetto di questo capitolo non è solamente di dare un processo per effettuare la divisione, ma di far conoscere una regola comoda e pratica.

55. Da ciò che precede apparisce che è sempre

facile decidere, se il quoziente di due dati numeri è maggiore o minore di un terzo numero arbitrariamente scelto.

Siano i numeri 63724 e 453.

Cerchiamo se il quoziente della loro divisione supera 135. Si tratta di sapere se 63724 contiene più o meno di 135 volte il divisore 453; cioè a dire, se il dividendo è maggiore o minore di 453×135; effettuando il prodotto si trova

$$453 \times 135 = 61155;$$

ma 63724 supera 61155, quindi il quoziente è maggiore di 135. Si vede anche che 135 non è la sua parte intera giacchè l'eccesso di 63724 sopra 61155 è 2569 che contiene ancora molte volte 453.

Caso semplice della divisione

56. Per fare una divisione qualunque è utile saper risolvere la questione seguente:

Trovare la parte intera del quoziente di una divisione, quando questa parte intera ha una sola cifra.

Distingueremo tre casi:

1° *Il divisore ha una sola cifra.*

La tavola di moltiplicazione insegna, in questo caso, qual'è il massimo multiplo del divisore che è contenuto nel dividendo, e, per conseguenza (54), fa conoscere la parte intera del quoziente.

Esempio. 77 diviso per 9 dà per quoziente 8, giacchè il massimo multiplo di 9 contenuto in 77 è 72 ovvero 9×8. Il resto è 5.

2° *Il divisore è composto di una cifra significativa seguita da zeri.*

Debbasi, per esempio, dividere 37857 per 5000. Il dividendo si compone di 37 migliaia e di 857 unità; ora questa seconda parte non contiene migliaia, quindi il quoziente della divisione di 37857 per 5000 non può provenire che dalla divisione delle 37 migliaia del dividendo per le 5 migliaia del divisore, o, ciò ch'è lo stesso, di 37 per 5, perchè i multipli del divisore 5000 ossia 5 migliaia, essendo delle migliaia ripetute un numero intero di volte, il più grande di questi multipli, che sia contenuto nel dividendo, non dipende che dal numero di migliaia contenuto nel dividendo stesso. Quindi potremo dire in generale: *Quando il divisore è composto di una cifra significativa seguita da zeri, per trovare la parte intera del quoziente si possono sopprimere questi zeri ed un egual numero di cifre alla destra del dividendo, effettuando poi l'operazione sui numeri che restano.*

Esempio. Sia da dividere 783217 per 9000; la parte intera del quoziente è la stessa che quella del quoziente di 78 per 9, ossia eguale a 8.

3° *Il divisore è un numero qualunque.*

Dalla semplice ispezione del dividendo e del divisore si desume agevolmente, se il quoziente è minore di 10; giacchè per questo è necessario e sufficiente che il dividendo non contenga 10 volte il divisore, cioè a dire che sia minore del prodotto del divisore per 10, ossia del risultato ottenuto scrivendo uno zero alla destra del divisore (**35**).

Esempio. 37892 diviso per 3814 darà un quoziente minore di 10, giacchè 37892 è minore di 38140.

Poichè il quoziente deve essere minore di 10, si potrebbe trovarlo moltiplicando il divisore pei numeri

1, 2, 3, 4, ecc., e fermandosi tosto che due prodotti comprendessero tra loro il dividendo; sia, per esempio, da dividere 117 per 23; si ha

$$1 \times 23 = 23$$
$$2 \times 23 = 46$$
$$3 \times 23 = 69$$
$$4 \times 23 = 92$$
$$5 \times 23 = 115$$
$$6 \times 23 = 138,$$

117 è dunque compreso tra 5 volte 23 e 6 volte 23, e per conseguenza (**52**), la parte intera del quoziente cercato è 5.

Questo processo non sarà mai troppo lungo, poichè si dovranno fare al più 9 piccole moltiplicazioni; tuttavia è utile abbreviarlo. Ciò si ottiene giovandosi della seguente osservazione.

La cifra che più influisce sul valore del divisore è la prima alla sua sinistra: se dunque si sostituiscono tutte le altre con zeri, si avrà un quoziente, che poco differisce dal vero, e molto facile ad ottenere.

Questo primo valore approssimato del quoziente può essere maggiore, ma non minore del vero. Giacchè, sostituendo degli zeri a tutte le cifre del divisore, eccettuata la prima, si diminuisce quest' ultimo e si aumenta evidentemente il quoziente; in guisa che la parte intera può, qualche volta, restare la stessa, ma non può, in niun modo, aumentare. Alcuni tentativi permetteranno in ciascun caso di trovare se la cifra ottenuta è maggiore del vero, e quante unità fa d' uopo toglierle.

Esempio. Si debba dividere 4573 per 782; si dividerà dapprima 4573 per 700. La parte intera del quoziente è la medesima (**56**, 2°) che quella della divisione di 45 per 7, ed è quindi eguale a 6. Dunque la

parte intera del quoziente cercato è eguale o minore di 6; per sperimentare questa cifra 6, si moltiplicherà il divisore pei numeri 6, 5, 4, ..., sino a che si trovi un prodotto che sia minore del dividendo o eguale ad esso. 782 moltiplicato per 6 dà per prodotto 4692 che è maggiore del dividendo. Ma il prodotto per 5 è 3910, minore di 4573; dunque il dividendo contiene 5 volte il divisore, ma non lo contiene 6 volte, e la parte intera del quoziente è quindi uguale a 5.

57. Osservazione. Sostituendo tutte le cifre del divisore, eccettuata la prima, con zeri, si ottiene dunque un limite superiore del quoziente: in un modo analogo può ottenersi un limite inferiore. Riprendiamo in effetto l'esempio precedente. Invece di sostituire 700 al divisore 782, gli si sostituisca 800; la parte intera del quoziente della divisione di 4573 per 800 è la stessa (**56**, 2°) che quella della divisione di 45 per 8, ed è quindi eguale a 5; ma, sostituendo 800 al divisore, abbiamo aumentato il suo valore e, per conseguenza, diminuito quello del quoziente; dunque la parte intera di quest'ultimo non può essere minore di 5, cioè a dire è 5 *almeno*.

Talune volte l'osservazione precedente permette di determinare esattamente la parte intera del quoziente. Sia per esempio da dividere 6378 per 875; sostituendo 800 al divisore, la parte intera del quoziente è (**56**, 2°) la medesima che quella della divisione di 63 per 8, ossia 7; dunque la parte intera del quoziente cercato è 7 *al più*. Sostituendo 900 al divisore, la parte intera del quoziente è la stessa di quella della divisione di 63 per 9, cioè a dire ancora uguale a 7; la parte intera del quoziente cercato è dunque 7 *almeno*. Non potendo essere nè maggiore nè minore di 7, dev'essere necessariamente 7.

Divisione di due numeri interi qualunque

58. Allorquando il quoziente è maggiore di 10, si compone di più cifre, che fa d'uopo trovare successivamente.

La ricerca della prima cifra si risolve nelle due questioni seguenti: 1° Cercare l'ordine delle unità rappresentate dalla prima cifra del quoziente, 2° cercare il valore di questa prima cifra.

Debbasi dividere 8593214 per 247.

Per trovare l'ordine delle unità più elevate del quoziente, separiamo alla sinistra del dividendo tante cifre, quante sono necessarie per formare un numero compreso fra il divisore e il suo decuplo. Questo numero, che nel caso attuale è 859, rappresentando decine di migliaia, dico che la prima cifra del quoziente rappresenterà anche decine di migliaia, o, in altri termini, che il quoziente è maggiore di diecimila e minore di centomila.

1° Il quoziente è maggiore di 10000, giacchè il dividendo contenendo 859 decine di migliaia, è maggiore di 247 decine di migliaia, cioè a dire di diecimila volte il divisore.

2° Il quoziente è minore di 100000, giacchè il dividendo, contenendo solamente 85 centinaia di migliaia, è minore di 247 centinaia di migliaia, cioè a dire di centomila volte il divisore.

Questo ragionamento è evidentemente generale, e conduce alla regola seguente:

Separando alla sinistra del dividendo tante cifre, quante sono necessarie per formare un numero maggiore del divisore e minore del suo decuplo, la prima cifra del quoziente rappresenta unità del medesimo or-

dine dell' ultima cifra del numero formato da quelle cifre.

59. Adesso bisogna trovare il valore della prima cifra del quoziente, che sappiamo rappresentare decine di migliaia.

La questione da risolvere è la seguente:

Quante decine di migliaia vi sono nel quoziente della divisione di 8593214 per 247? Ovvero ancora, il che torna lo stesso (**54**), qual' è il massimo numero di decine di migliaia che, moltiplicato per 247, dia un prodotto inferiore a 8593214? Il prodotto di un numero di decine di migliaia per 247 non potendo dare che decine di migliaia, è chiaro che le cifre 3214 del dividendo, che rappresentano unità d' ordine inferiore, non hanno alcuna influenza sul prodotto in questione, che dev' essere tutto al più eguale a 859 decine di migliaia. Dunque la prima cifra del quoziente è il massimo numero, che moltiplicato per 247 dà un prodotto inferiore o eguale a 859; per conseguenza (**54**), esso è la parte intera del quoziente della divisione di 859 per 247.

Il ragionamento è evidentemente generale e conduce alla regola seguente:

Dividendo il numero separato alla sinistra del dividendo pel divisore, si ottiene il valore assoluto della prima cifra del quoziente.

Dividendo 859 per 247, come si è detto (**56**), si trova 3 per quoziente. Dunque il quoziente cercato contiene 3 diecine di migliaia.

60. Osservazione. Il numero 859, che si separa alla sinistra del dividendo per dividerlo per il divisore, si chiama *dividendo parziale*. Un dividendo parziale è sempre maggiore del divisore e minore del suo decuplo; e può avere tante cifre quante ne ha il divisore, o una di più.

61. Vediamo ora come si può procedere per trovare tutte le altre cifre del quoziente. Il dividendo può considerarsi come composto di 741 decine di migliaia prodotto del divisore 247 per le 3 decine di migliaia del quoziente, e dell'eccesso del dividendo sopra questo numero. Le 3 decine di migliaia, che abbiamo trovate innanzi, rappresentano il quoziente della divisione di 741 decine di migliaia per 247; se dunque togliamo da 8593214 queste 741 decine di migliaia, dividendo il resto per 247 si otterrà il numero che deve completare il quoziente, cioè a dire il numero formato dall'insieme delle cifre ancora ignote.

Il ragionamento è evidentemente generale e conduce alla regola seguente:

Moltiplicando il divisore per la prima cifra trovata del quoziente e togliendo il prodotto dal dividendo, il resto di questa sottrazione diviso pel divisore darà il numero formato dall'insieme delle altre cifre del quoziente.

Osservazione. Per moltiplicare 247 per 30000 basta evidentemente moltiplicarlo per 3 e scrivere quattro zeri alla destra del prodotto; quindi la sottrazione si farà sottraendo 247 moltiplicato per 3 decine di migliaia, o 741 decine di migliaia, dalle 859 decine di migliaia del dividendo, e scrivendo di seguito al resto le altre cifre del dividendo.

Togliere da 859 il prodotto di 247 per 3, significa cercare il resto della divisione di 859 per 247, che ci ha dato la prima cifra del quoziente; dunque è alla destra del resto di questa divisione che bisogna scrivere le ultime cifre del dividendo.

Il numero così ottenuto, diviso pel divisore, darà l'insieme delle altre cifre del quoziente.

62. I teoremi precedenti permettono di effettuare

una divisione qualunque, giacchè danno il mezzo di trovare la prima cifra del quoziente, e riducono la ricerca di tutte le altre ad una nuova divisione. Applicandoli a questa seconda divisione, si troverà una seconda cifra del quoziente, e si ridurrà la ricerca di tutte le altre ad una terza divisione; quest'ultima darà una terza cifra del quoziente ecc. Dunque siamo condotti alla regola seguente:

1° *Per dividere l'uno per l'altro due numeri interi, si separano alla sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie per formare un numero maggiore del divisore, ma minore del suo decuplo; dividendo questo numero per il divisore, si ottiene la prima cifra del quoziente, che rappresenta unità dello stesso ordine di questo primo dividendo parziale.*

Questa prima parte della regola, risulta dai teoremi dimostrati (**58**, **59**).

2° *Si calcola il resto della divisione, che ha fornito la prima cifra del quoziente, e si scrivono alla sua destra le altre cifre del dividendo; il numero così formato, diviso pel divisore, darà le altre cifre del quoziente.*

Questa seconda parte della regola risulta dal teorema dimostrato (**61**).

3° *Applicando a questa nuova divisione la parte 1ª della regola enunciata, si otterrà la prima cifra del nuovo quoziente che è, in generale, la seconda del quoziente cercato; le altre saranno date da una terza divisione.*

Questa terza parte della regola non ha bisogno di dimostrazione.

La cifra data da questa nuova divisione sarà la seconda, soltanto quando le unità che esprime sono di un ordine immediatamente inferiore a quello cui appartiene

la prima cifra; quando ciò non avvenisse, bisognerebbe porre fra le due cifre uno o più zeri. Questa circostanza si presenterà quando, per formare il secondo dividendo parziale, farà d'uopo scrivere più di una nuova cifra accanto alla differenza fra il primo dividendo parziale e il prodotto del divisore per la prima cifra del quoziente. È chiaro in effetto, che in questo caso le unità espresse dal secondo dividendo parziale non saranno di un ordine immediatamente inferiore a quelle rappresentate dal primo.

4° *Si continua a questo modo sino a che si ottenga un dividendo minore del divisore; questo dividendo è il resto dell' operazione.*

Giacchè questo dividendo, diviso pel divisore, non darebbe neppure una nuova unità da aggiungere al quoziente; esso sarà dunque il resto. Se l' ultima cifra ottenuta non esprimesse unità semplici, bisognerebbe scrivere alla sua destra uno o più zeri per farle acquistare il valore che deve avere.

Maniera di disporre l' operazione

63. Per effettuare una divisione si scrive il dividendo ed accanto ad esso il divisore; si separano mediante una linea verticale, e si tira una linea orizzontale sotto al divisore. Ciò fatto, si separa con un punto il primo dividendo parziale e si scrive provvisoriamente, come prima cifra del quoziente, il resultato approssimato ottenuto nel modo detto innanzi (56). Si moltiplica questa prima cifra per il divisore, e si sottrae il prodotto dal primo dividendo parziale. Se questa sottrazione non può effettuarsi, si diminuisce la cifra scritta al quoziente, sino a che il suo prodotto per il divisore sia minore del dividendo parziale; si fa allora la sottra-

zione senza scrivere il prodotto medesimo, togliendo a memoria le sue diverse cifre da quelle del divisore (**26**) a misura che si ottengono. Alla destra del resto si scrive la prima delle cifre del dividendo non impiegate, o, se ciò è necessario, le due prime, le tre prime, ... cifre non ancora adoperate, in modo da formare un secondo dividendo parziale più grande del divisore. Questo dividendo parziale, diviso pel divisore, dà una seconda cifra del quoziente. Si continua al modo stesso, sino a che si ottenga un dividendo parziale minore del divisore e che esprima unità semplici.

I calcoli della divisione di 8593214 per 247 si fanno nel modo seguente:

8593214	247
1183	34790
1952	
2231	
84	

Si separa alla sinistra del dividendo il numero 859 maggiore del divisore, e si divide per 247. Secondo la regola (**56**) bisognerebbe provare la cifra 4, ma si riconosce a prima vista che è troppo grande; si scrive dunque 3 al quoziente. Si moltiplica 3 per 247 e si toglie il prodotto da 859, il resto è 118. Alla sua destra si scrive la prima delle rimanenti cifre del dividendo, e si forma il dividendo parziale 1183, che fa d'uopo dividere per 247. Dividendo 11 per 2 si ha per quoziente 5, ma si vede che il prodotto di 247 per 5 non può togliersi da 1183; dunque 5 è troppo grande e bisogna provar 4. Togliendo da 1183 il prodotto di 247 per 4, si trova per resto 195; alla sua destra si scrive la prima delle rimanenti cifre del dividendo, e si forma il divi-

dendo parziale 1952, che bisogna dividere per 247. Dividendo 19 per 2 si ha per quoziente 9, quindi bisognerebbe (**56**) provare la cifra 9; ma è facile vedere che è troppo grande, e che lo stesso accade della cifra 8; dunque la cifra da scriversi al quoziente è 7. Si toglie quindi da 1952 il prodotto di 247 per 7, il resto è 223; alla sua destra si scrive la prima delle rimanenti cifre del dividendo, e si forma il dividendo parziale 2231, ch' è mestieri dividere per 247. Il 2 è contenuto 11 volte nel 22; quindi siamo condotti a porre nel quoziente la cifra 9 che è la vera, giacchè il suo prodotto per 247 può togliersi da 2231, e lascia per resto 8. Alla destra di questo resto si scrive l'ultima cifra del dividendo, e si forma così il dividendo parziale 84, che non può dividersi per 247, ed è per conseguenza il *resto* dell'operazione; ma fa d'uopo porre uno zero alla destra della cifra 9, perchè questa cifra rappresenta decine, come il dividendo parziale 2231, da cui proviene.

Consideriamo ancora l'esempio seguente, nel quale il quoziente contiene molte volte la cifra 0.

Sia da dividersi 1054854 per 351.

$$\begin{array}{r|l} 1054854 & 351 \\ \cline{2-2} 1854 & 3005 \\ 99 & \end{array}$$

Si separa alla sinistra del dividendo il numero 1054 maggiore del divisore, e si divide per 351. Il quoziente (**56**) non può superare il quoziente della divisione di 10 per 3, cioè a dire 3; proviamo dunque la cifra 3: il prodotto di 3 per 351 è 1053, minore di 1054. La cifra 3 è dunque la vera, e il resto di questa prima divisione parziale è 1, eccesso di 1054 su 1053. Alla destra di 1 scrivo le cifre 854 del dividendo, e, per ottenere un

secondo dividendo parziale superiore a 351, debbo prendere tutto il numero 1854, il quale rappresentando unità semplici, mentre il dividendo precedente 1054 rappresenta migliaia, bisognerà porre due zeri nel quoziente tra le cifre date da queste divisioni. Per dividere 1854 per 351, si dividerà (56) 18 per 3, e si otterrà 6 per limite superiore del quoziente, poi dividendo 18 per 4 si otterrà 4 per limite inferiore del quoziente; dunque il quoziente è 4, 5 o 6. Il prodotto di 6 per 351 è 2106, numero superiore a 1854; 6 è dunque troppo grande. Il prodotto di 5 per 351 è 1755, numero minore di 1854, dunque la cifra 5 è la vera. Il quoziente cercato è dunque 3005, e il resto è 99, eccesso di 1854 su 1755.

64. Quando il quoziente di una divisione debba avere un gran numero di cifre, si rende l'operazione più facile e speditiva, formando una tavola dei prodotti del divisore per i nove primi numeri. Questa tavola si forma con delle semplici addizioni; si aggiunge prima il divisore a se stesso, poi il divisore alla somma ottenuta, e così di seguito, fino a che si ottenga una somma eguale a dieci volte il divisore; l'ultimo prodotto non serve che come riprova delle successive addizioni.

Determinando a ciascuna divisione parziale il multiplo che si avvicina più per difetto al dividendo parziale, si trovano immediatamente le diverse cifre del quoziente.

Esempio. Debbasi dividere 314159265358979323 per 3183098.

```
314159265358979323  | 3183098
28647882            |------------
--------            | 98696070733
 27680445
 25464784
 --------
  22156613
  19098588
  --------
   30580255
   28647882
   --------
    19323738
    19098588
    --------
      22515097
      22281686
      --------
        23341193
        22281686
        --------
         10595072
          9549294
         --------
          10457783
           9549294
          --------
            908489
```

1	3183098
2	6366196
3	9549294
4	12732392
5	15915490
6	19098588
7	22281686
8	25464784
9	28647882

Numero delle cifre del quoziente

65. L'ordine delle unità rappresentate dalla prima cifra dei quoziente essendo conosciuto sin dal principio dell'operazione, si saprà immediatamente in ogni caso particolare quante cifre deve avere il quoziente. Infatti è chiaro che avrà due cifre, se la sua prima cifra rappresenta decine, tre se rappresenta centinaia, ecc. Ma vi ha in oltre una regola generale, che è bene conoscere.

Il numero delle cifre del quoziente è eguale alla differenza tra il numero delle cifre del dividendo e il

numero delle cifre del divisore, o a questa differenza aumentata di una unità.

La prima cifra del quoziente rappresenta infatti unità del medesimo ordine del primo dividendo parziale; quindi l'ultima cifra del primo dividendo parziale e la prima del quoziente saranno seguite da uno stesso numero di cifre.

Ora, il primo dividendo parziale può avere (60) tante cifre quante ne ha il divisore, o una di più. Nel primo caso il numero delle cifre, che seguono il primo dividendo parziale e, per conseguenza, il numero di quelle, che seguono la prima cifra del quoziente, è eguale alla differenza tra il numero delle cifre del dividendo e il numero delle cifre del divisore; nel secondo caso è eguale a questa differenza diminuita di un'unità.

Il numero totale delle cifre del quoziente, *compresa la prima*, è dunque, nel primo caso, superiore di un'unità, o, nel secondo, eguale alla differenza fra il numero delle cifre del dividendo e quello delle cifre del divisore; ciò che dimostra precisamente la proposizione enunciata.

Esempio. Sia da dividersi 3756821 per 457.

Il primo dividendo parziale essendo 3756, la prima cifra del quoziente esprimerà unità del medesimo ordine della cifra 6 del dividendo; essa sarà dunque seguita da tre cifre, ed il quoziente avrà per conseguenza quattro cifre.

Metodo per provare le cifre del quoziente

66. Abbiam veduto che ciascuna cifra del quoziente si ottiene mediante una divisione parziale, il quoziente della quale è minore di 10.

Per fare queste divisioni parziali si comincia (56, 57).

dal cercare due limiti, uno inferiore, l'altro superiore del quoziente, e si provano le cifre comprese fra questi limiti, moltiplicandole per il divisore e cercando la maggiore di quelle, che danno un prodotto inferiore al dividendo parziale. Vi ha un altro processo quasi sempre più agevole, che dichiareremo con un esempio.

Sia da dividere il dividendo parziale 1853 per 392.

Il quoziente è (**56**) al più eguale a 18 diviso per 3, cioè a 6, ed al meno eguale a 18 diviso per 4, cioè a 4; è dunque 4, 5 o 6. Proviamo dapprima la cifra 6; perchè questa sia la vera, basta che 6 moltiplicato per 392 dia un prodotto minore di 1853: o, che è lo stesso, basta che 392 sia minore della sesta parte di 1853. Prendiamo dunque la sesta parte di 1853; se dessa è minore di 392, la cifra 6 è da rigettarsi. Ora la divisione per un numero di una sola cifra, cioè di 1853 per 6, si effettua colla massima facilità

1853	6
053	30...

18 diviso per 6 dà per quoziente 3 e per resto 0. Il secondo dividendo parziale è 53, che esprime unità semplici; il primo esprimendo centinaia, bisogna porre uno zero fra le due cifre, che si ottengono al quoziente. Possiamo arrestarci a questo punto, perchè il quoziente cominciando per 30... è minore di 392. La cifra 6 va dunque scartata.

Proviamo allo stesso modo la cifra 5;

1853	5
35	37...

18 diviso per 5 dà per quoziente 3 e per resto 3. Il secondo dividendo parziale è 35; 35 diviso per 5 dà

per quoziente 7. Possiamo fermarci, perchè il quoziente cominciando per 37 . . . è minore di 392. Dunque la cifra 5 non è accettabile.

Proviamo finalmente la cifra 4;

$$\begin{array}{r|l} 1853 & 4 \\ \cline{2-2} & 4\ldots. \end{array}$$

18 diviso per 4 dà per quoziente 4. Possiamo fermarci qui, essendo giusta la cifra 4, perchè il quoziente comincia per 4 e quindi è maggiore di 392.

Prova della divisione

67. *Per fare la prova di una divisione si moltiplica il divisore pel quoziente e si aggiunge a questo prodotto il resto, se vi è; il resultato che si ottiene dev' essere eguale al dividendo.*

Supponiamo che dividendo 7834 per 31 si sia trovato 252 per quoziente e 22 per resto; il dividendo deve contenere (46) una parte, di cui un trentunesimo è 252 ed inoltre un resto 22; dunque si deve avere

$$7834 = \textit{trenta e una volta } 252 + 22:$$

ossia:

$$7834 = 31 \times 252 + 22,$$

ed è questa la condizione necessaria e sufficiente perchè l' operazione sia esatta.

Osservazione I. Indicando con A e B due numeri qualunque, per esprimere che il quoziente della loro divisione è Q ed il resto R, è sufficiente scrivere

$$A = B \times Q + R,$$

ed aggiungere che R è minore di B.

Osservazione II. Come la moltiplicazione serve di prova alla divisione, così la divisione può servire di prova alla moltiplicazione. Perchè una moltiplicazione sia esatta, fa d' uopo infatti che il prodotto diviso per il moltiplicando dia per quoziente il moltiplicatore, e per resto zero. Se, per esempio, 30 è eguale a 5×6, il quinto di 30 è evidentemente 6.

Teoremi relativi alla divisione

68. Teorema I. *Quando si moltiplicano o si dividono il dividendo e il divisore di una divisione per un medesimo numero, il quoziente non cambia; il resto solo, se vi è, resulta moltiplicato o diviso per questo stesso numero.*

752 diviso per 13 dà per quoziente 57 e per resto 11; bisogna provare che prendendo per dividendo 752×12 e per divisore 13×12, il quoziente sarà sempre 57 ed il resto 11×12.

Il resultato della prima divisione ci dice infatti che 752 *unità* contengono 57 volte 13 *unità* ed inoltre 11 *unità*.

La parola unità esprime qui una quantità affatto arbitraria, che può essere una collezione di 12 oggetti o una *dozzina*, e, per conseguenza, 752 *dozzine* contengono 57 volte 13 *dozzine* ed inoltre 11 *dozzine*.

Ora quest' ultima frase esprime che 12×752, diviso per 12×13, dà per quoziente 57, ed un resto 12×11 evidentemente minore del divisore. Ciò che bisognava dimostrare. Il ragionamento è generale, e si potrebbe sostituire a 12 un moltiplicatore qualunque.

69*. Questo teorema può dimostrarsi anche in un altro modo. Dall' ipotesi fatta si ha (67) l' eguaglianza

$$752 = 13 \times 57 + 11;$$

due numeri eguali moltiplicati per un medesimo numero danno risultati eguali; quindi avremo, moltiplicando ambedue i membri dell'eguaglianza per 12:

$$752 \times 12 = 12 \times 13 \times 57 + 11 \times 12.$$

Nel prodotto $12 \times 13 \times 57$, i fattori 12 e 13 possono essere sostituiti dal loro prodotto effettuato; dunque

$$752 \times 12 = (12 \times 13) \times 57 + 11 \times 12.$$

Ma 11 è il resto della divisione di 752 per 13; e perciò 11 è minore di 13; dunque il prodotto di 11 per 12 è minore del prodotto di 13 per 12; allora dall'ultima eguaglianza risulta che 752×12 diviso per 13×12 dà per quoziente 57 e per resto 11×12.

Rappresentando con A e B i due numeri dati, con q il quoziente della loro divisione, con r il resto, con m un numero intero qualunque, il teorema precedente è espresso in generale dalla formula

$$A \times m = (B \times m) \times q + r \times m$$

Dalla proprietà dimostrata resulta che inversamente, dividendo ambedue i termini della divisione per uno stesso numero il quoziente non cambia.

70*. Teorema II. *Per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere questo fattore nel prodotto.*

Infatti il quoziente della divisione del prodotto $5 \times 7 \times 4$ per 7 è 5×4, perchè, moltiplicando il quoziente 5×4 pel divisore 7, si ottiene per l'appunto il dividendo $5 \times 7 \times 4$.

Osservazione. Da questo teorema si deduce facilmente che, *per dividere un prodotto per un numero, basta dividere uno dei fattori del prodotto per questo numero, purchè però questa divisione si faccia esattamente.*

Supponiamo infatti di voler dividere per 7 il pro-

dotto $5 \times 21 \times 4$. Ora $21 = 7 \times 3$; quindi il prodotto dato può scriversi

$$5 \times 7 \times 3 \times 4.$$

Ma per dividere questo prodotto per 7, basta sopprimere in esso il fattore 7; dunque il quoziente cercato è

$$5 \times 3 \times 4;$$

ciò che bisognava dimostrare.

71. Teorema III. *Per dividere un numero per il prodotto di molti fattori, è sufficiente dividerlo successivamente per ciascuno di essi.*

La dimostrazione di questo teorema è facilissima, quando le divisioni si fanno esattamente. Debbasi infatti dividere 360 per 30, che è il prodotto dei fattori 2, 3, 5. Il quoziente della divisione di 360 per 30 è 12, quindi si ha

$$360 = 30 \times 12, \text{ ovvero } 360 = 2 \times 3 \times 5 \times 12.$$

Dividendo per 2 questi due numeri eguali, avremo quozienti eguali; dunque (**70***)

$$360 : 2 = 3 \times 5 \times 12;$$

dividendo poi per 3 ambedue i membri della nuova eguaglianza

$$360 : 2 : 3 = 5 \times 12;$$

e finalmente dividendoli per 5,

$$360 : 2 : 3 : 5 = 12;$$

cioè a dire

$$360 : 2 : 3 : 5 = 360 : (2 \times 3 \times 5).$$

72. Se le divisioni non danno quozienti interi, e ci limitiamo a prendere la parte intera di ciascuno d'essi,

il teorema è ancora esatto, ma non apparisce egualmente evidente. Cominceremo dallo stabilire un lemma o proposizione preliminare.

Se un dividendo non è intero, la parte intera del quoziente della divisione di esso per un divisore intero dipende solamente dalla parte intera del dividendo.

Supponiamo, per esempio, che si debba dividere per 17 un numero compreso tra 123 e 124: dico che la parte intera del quoziente è la medesima di quella che si ottiene dividendo 123 per 17. La parte intera del quoziente è infatti (**55**) il massimo numero intero, il cui prodotto per 17 sia contenuto nel dividendo; questa parte è per conseguenza eguale al quoziente, che si otterrebbe dividendo per 17 il massimo multiplo di 17 contenuto nel dividendo; ma i multipli di 17 sono numeri interi; dunque il massimo di questi multipli contenuto in un numero compreso tra 123 e 124, è lo stesso che il massimo di quelli che sono contenuti in 123.

Ciò posto, supponiamo che si debba dividere 1847 per 12. Si può prendere il terzo di 1847, poscia il quarto del resultato. Dividendo 1847 per 3, troviamo 615 per parte intera del quoziente; per conseguenza il terzo di 1847 è compreso tra 615 e 616. Quando dunque prenderemo il quarto di questo terzo, la parte intera sarà la stessa che quella del quarto di 615. Quindi è provato che la parte intera del quoziente di 1847 per 12 è la stessa, che quella del quoziente di 615 per 4, cioè a dire che è uguale al resultato ottenuto dividendo 1847 per 3, poscia il resultato per 4, e limitandosi, ciascuna volta, a prendere la parte intera del quoziente.

73*. Teorema IV. *Per dividere due potenze di uno stesso numero, basta scrivere il numero, dandogli per esponente la differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore.*

Così il quoziente della divisione di 5^7 per 5^3 è $5^4 = 5^{7-3}$, perchè il numero 5^4 moltiplicato per il divisore 5^3 dà il dividendo 5^7.

Esercizî

I. Se un numero è esattamente divisibile per 9, per trovare il quoziente della divisione si può procedere nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 56940 \\ 51246 \\ \hline 5694 \end{array}$$

Sia il numero 51246; scrivete uno zero al di sopra della cifra delle unità, togliete il dividendo da un numero che, avendo questo zero per ultima cifra, avesse, per le altre cifre, quelle che somministra la sottrazione medesima; così dite: 6 da 10, 4; 4 è la cifra delle decine del numero superiore; 4 e 1, 5; 5 da 14, 9; 9 è la cifra delle centinaia del numero superiore. 2 e 1, 3; 3 da 9, 6; 6 è la cifra delle migliaia del numero superiore. 1 da 6, 5; 5 è la cifra delle decine di migliaia del numero superiore; 5 da 5, 0; il quoziente cercato è 5694.

II. Se un numero è esattamente divisibile per 11, si può fare la divisione in un modo analogo. Sia da dividersi il numero 345785 per 11.

$$\begin{array}{r} 345785 \\ 314350 \\ \hline 31435 \end{array}$$

Scrivete uno zero al di sotto della cifra delle unità e togliete dal dividendo un numero, di cui lo zero è l' ultima cifra, e di cui le altre cifre sono somministrate dalla sottrazione medesima.

III. Se un numero è esattamente divisibile per 99, si può procedere nel modo seguente per ottenere il quoziente. Si debba dividere 56529 per 99.

$$\begin{array}{r} 57100 \\ 56529 \\ \hline 571 \end{array}$$

Scrivete due zeri al di sopra delle due ultime cifre del dividendo e togliete il dividendo da un numero, che abbia questi due zeri per ultime cifre, e quelle somministrate dalla sottrazione medesima per le rimanenti.

IV. Quando si dice che una macchina ha la forza di un cavallo, s'intende che è capace di produrre un lavoro corrispondente a un certo numero di volte quello di un cavallo comune da tiro. Ora, un certo numero di macchine può dare un lavoro eguale a quello di 163401 cavalli da tiro. Sapendo che la loro forza totale è di 54467 cavalli, trovare quanti cavalli da tiro può sostituire una macchina della forza di 25 cavalli.

V. Una macchina a vapore consuma, per forza di cavallo e per ora, 6750 grammi di carbone; sapendo che ha consumato in otto giorni (lavorando giorno e notte) 395 ettolitri di carbone, del peso di 80 chilogrammi l'ettolitro, trovare qual'è la sua forza.

VI. Una strada ferrata ha trasportato in un anno 1129371 viaggiatori ad una distanza media di 13 chilometri; ha consumato in combustibile 98536 franchi. Il coke valendo 4 franchi 30 centesimi l'ettolitro, e l'ettolitro pesando 80 chilogrammi, trovare, in grammi, il peso del coke corrispondente a un viaggiatore e ad un chilometro.

VII. Un negoziante di seterie paga 960 lire per una pezza di velluto e L. 648 per un'altra della stessa qualità, lunga però 13 metri di meno. Si domanda il prezzo di un metro di velluto.

VIII. Rivendendo per L. 12480 un certo numero di

cavalli, un mercante scapita L. 208 in tutto e 26 lire su ciascuno. Quanto gli era costato ciascun cavallo?

IX. Due negozianti hanno posto in commercio fra tutti e due una somma di L. 40860, ed il secondo ha messo L. 8640 più del primo. Si ritirano dal commercio con un guadagno complessivo eguale alla quindicesima parte del capitale impiegato. Qual somma spetta a ciascuno fra capitale e guadagno.

X. Raddoppiando il prodotto di una moltiplicazione e dividendo poi il resultato per 12, si ottiene 14784. Sapendo che uno dei fattori di quel prodotto incognito è 501, si domanda l'altro fattore.

DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.

Convenzioni che possono dare origine ai differenti sistemi.

74. Il principio del nostro sistema di numerazione non dipende dalla scelta particolare del numero 10, che esprime quante unità dell' ordine seguente contiene un' unità di un ordine qualunque, e che perciò si chiama *base* di questo sistema. Si sarebbe potuto porre un' altra base, e, conservando lo stesso principio, fare uso di un numero differente di caratteri. Se, per esempio, si prendesse per base il numero 8, bisognerebbe fare la convenzione che una cifra posta alla destra di un' altra le fa acquistare un valore 8 volte maggiore. Quindi le unità dei differenti ordini si scriverebbero:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \\ \text{ecc.} \end{array}$$

e rappresenterebbero rispettivamente 8 unità, 64 unità, 512 unità, 4096 unità, e ciascuna di esse sarebbe 8 volte più grande della precedente. Per scrivere un numero in questo sistema bisognerebbe decomporlo in unità di diversi ordini, e non si avrebbe mai bisogno di ammettere più di 7 unità di un ordine dato, giacchè 8 ne formerebbero una dell' ordine seguente. 8 caratteri quindi, compresovi lo zero, basterebbero per scrivere tutti i numeri.

Convertire in un sistema qualunque un numero scritto nel sistema decimale.

75. Abbiasi il numero 783214, scritto nel sistema decimale, che si voglia convertire nel sistema a base 8. Poichè in questo sistema ciascuna unità del second' ordine vale 8 unità semplici, dividendo il numero proposto per 8, il quoziente esprimerà il numero di unità del second' ordine che il numero dato contiene, ed il resto sarà, per conseguenza, la cifra delle unità semplici. Al modo stesso, dividendo il quoziente ottenuto per 8, il nuovo quoziente sarà il numero delle unità del terz' ordine ed il resto sarà la cifra delle unità del secondo · e continuando così fino a che si giunga ad un quoziente minore di 8, si otterranno tutte le cifre dell' espressione richiesta. Ecco il tipo del calcolo:

783214	8					
63	97901	8				
72	17	12237	8			
01	19	42	1529	8		
14	30	23	72	191	8	
6	61	77	09	31	23	8
	5	5	1	7	7	2

Le cifre cercate sono i resti successivamente ottenuti e l' ultimo quoziente; dunque la forma cercata de. numero 783214 nel sistema a base 8 è 2771556.

Osservazione. Se la base scelta è maggiore di 10 bisognerà fare uso di più di dieci caratteri. Per esempio, nel sistema la cui base è 12, o duodecimale, biso-

gnerebbe un carattere per esprimere 10 ed un altro per esprimere 11; siano questi, per esempio, a e b. Applicando il metodo precedente al numero 59321 si trova che esso si esprime, nel sistema duodecimale, con $2a3b5$.

Convertire nel sistema decimale un numero scritto in un sistema qualunque.

76. Questa questione non differisce in fondo dalla precedente; nei due casi si tratta di passare da un sistema ad un altro, ed il sistema decimale non ha alcuna proprietà particolare, che obblighi a distinguerlo dagli altri. Si potrebbe dunque passare da un sistema qualunque al sistema decimale mediante una serie di divisioni; ma queste divisioni dovrebbero essere fatte nel sistema di numerazione, nel quale fosse scritto il numero dato, e potrebbero, a causa della mancanza di abitudine, sembrare più imbarazzanti. Si possono quindi sostituire a queste divisioni delle moltiplicazioni fatte nel sistema decimale.

Esempio. Sia da convertire nel sistema decimale il numero $39\,a\,4$, scritto nel sistema duodecimale.

La cifra 4 esprime 4 *unità*,
La cifra a esprime 10×12 o 120 *unità*,
La cifra 9 esprime 9×12^2 o 1296 *unità*,
La cifra 3 esprime 3×12^3 o 5184 *unità*,

e per conseguenza, il numero proposto esprime le somme di questi differenti prodotti, cioè 6604.

Osservazione. Si potrebbe anche passare dal sistema decimale ad un sistema qualunque, effettuando solamente moltiplicazioni; ma queste moltiplicazioni

dovrebbero essere fatte nel nuovo sistema di numerazione.

Noi non ci occuperemo della maniera di operare in questi differenti sistemi, che non sono mai usati. Le regole essendo del resto assolutamente le medesime che pel sistema decimale, non vi sarà alcuna difficoltà per trovarle ed applicarle.

Esercizî

I. Quali sono, in un sistema di numerazione qualunque, i numeri che godono di proprietà analoghe a quelle dei numeri 9 e 11 [(85), (89)] nel sistema decimale?

II. b essendo la base di un sistema di numerazione, se un numero p divide $b^m - 1$ ed un numero N di m cifre, p dividerà tutti i numeri risultanti dalle diverse permutazioni circolari di N. (Si chiamano permutazioni circolari di m cifre i differenti risultati, che si otterrebbero scrivendo tutte queste cifre in cerchio, e leggendole, cominciando da una cifra qualunque, seguendo il cerchio).

Esercizî di ricapitolazione

I. Trovare la somma di tutti i numeri interi da 1 a 800.

II. Trovare la somma di tutti i numeri interi da 1 a 2537.

III. Determinare il 527° numero dispari.

IV. Si vuol dividere una somma di 5830 lire fra quattro persone, A, B, C, D, in modo che A abbia 80 lire più di B; B 100 lire più di C; C 130 lire più di D. Qual sarà la parte spettante a ciascuna persona?

V. Si vuol dividere una somma di L. 4680 fra due persone in modo che la seconda abbia il quadruplo di

quello che tocca alla prima. Qual sarà la parte di ciascuna persona?

VI. Si voglion dividere L. 18480 fra quattro persone A, B, C, D, in modo che B abbia il doppio di quello che ha A, C il triplo di quello che ha B e D il quadruplo di quanto ha C. Qual è la parte che spetta a ciascuna persona?

VII. A, B, C posseggono fra tutti L. 4320. Se B desse ad A L. 120 ed A desse a C L. 60, A verrebbe ad avere il triplo della somma posseduta da B, e questi il doppio della somma posseduta da C. Trovare qual somma possiede ciascuna di queste tre persone.

VIII. Due persone A e B hanno fra tutte e due L. 305. Se A avesse L. 35 di meno e B L. 30 di più, le due persone possederebbero somme eguali. Si domanda quanto possiede attualmente ciascuna.

IX. Trovare un numero di tre cifre, sapendo che la somma delle cifre delle decine e delle unità è 9; quella delle cifre delle centinaia e dell' unità è 13; e quella delle cifre delle centinaia e delle decine è 10.

X. Un negoziante di bestiame ha comprato 2 buoi 3 cavalli e 5 asini per L. 3660. Posto che un bue valga quanto 2 cavalli ed un cavallo quanto 8 asini, si cerchi il prezzo di ciascun capo di bestiame.

XI. Una compagnia di 13 uomini, 17 donne e 23 ragazzi in un giorno fa 456 metri di un certo lavoro. Posto che nello stesso tempo il lavoro fatto da una donna sia triplo di quello fatto da un ragazzo, e quello fatto da un uomo sia doppio di quello di una donna, si domanda quanti metri di lavoro farà in 14 giorni una compagnia di 9 uomini, 12 donne e 17 ragazzi.

XII. Due operai A e B fanno insieme un lavoro di 2400 metri in 12 giorni. A insieme con un terzo operaio C lo farebbe in 15 giorni; e B con un altro operaio C lo farebbe in 20 giorni. Si vuol sapere: 1° Quanti metri di lavoro fanno in un giorno i tre operai lavorando insieme. 2° Quanto tempo impiegherebbero a fare l' intero lavoro,

lavorando insieme. 3° Quanto tempo v'impiegherebbe da se solo ciascuno operaio.

XIII. Con L. 484 ho comprato una volta ettolitri 8 di vino ed ettolitri 12 di grano. Un'altra volta ho comprato con L. 620 ettolitri 8 dello stesso vino e 20 dello stesso grano al medesimo prezzo. Si domanda il prezzo di un ettolitro di ciascun genere.

XIV. Da una stazione ferroviaria son partiti un giorno per una certa destinazione 18 viaggiatori di prima classe e 50 di seconda, ed il prezzo complessivo dei biglietti è ammontato a L. 616. Un altro giorno son partiti dalla stessa stazione per la medesima destinazione 6 viaggiatori di prima classe e 22 di seconda, e l'ammontare complessivo de' biglietti è stato di L. 248. Si vuol sapere il prezzo di un biglietto di prima classe e di un biglietto di seconda.

XV. La distanza che separa due città è per ferrovia di 180 Km. Due treni partono da queste due città e vanno l'uno incontro all'altro; dopo quanto tempo s'incontreranno, supposto che il primo faccia 20 chilometri all'ora ed il secondo 16?

XVI. Due viaggiatori partono insieme da due città A e B distanti 62 chilometri, e vanno l'uno incontro all'altro. Quello che parte da A fa in media 4 chilometri all'ora e parte alle 8 antimeridiane: quello che parte da B fa in media 3 chilometri all'ora e parte alle 11 antimeridiane. A che ora s'incontrano, e quali saranno a questo momento le loro distanze dai respettivi punti di partenza?

XVII. Due corrieri partono simultaneamente da due città A e B distanti 30 chilometri e vanno nella stessa direzione. Quello che parte da A segue quello che parte da B e fa in media 7 chilometri all'ora, mentre quello che parte da B ne fa 5. Dopo quante ore il corriere, che parte da A, raggiungerà quello, che parte da B, e qual sarà allora la loro respettiva distanza dalla città di partenza?

XVIII. Da due stazioni A e B di una stessa ferrovia distanti 60 chilometri partono due treni. Quello che parte

da B parte alle 8 antimeridiane e fa 18 chilometri all'ora, ed è seguito da quello, che parte da A nella stessa direzione alle 10 antimeridiane e che fa 30 chilometri all'ora. A che ora il treno partito da A raggiungerà quello partito da B, e quanti chilometri saranno lontani ambedue dalle respettive stazioni di partenza?

XIX. Alle 5 antimeridiane parte un reggimento da una città e fa 5 chilometri all'ora. Alle 8 viene spedito un corriere coll'ordine di raggiungere il reggimento per portargli delle istruzioni ed essere di ritorno al punto di partenza alle 2 pomeridiane. Quanti chilometri dovrà percorrere all'ora.

XX. Si fa un pagamento di L. 105 con 36 monete, parte delle quali sono da L. 5 e parte da L. 2. Si vuol sapere qual'è il numero delle monete delle due specie.

XXI. Un operaio si obbliga a lavorare ad un'opera di premura per 90 giorni col patto di ricevere L. 3 per ogni giorno in cui lavora, e di pagarne 5 di multa per ogni giorno in cui manca al suo impegno. Alla fine del tempo stabilito riscuote L. 222. Quanti giorni ha lavorato e quanti ha mancato?

XXII. Raddoppiando un numero, triplicando il resultato e togliendo dal nuovo resultato ottenuto il doppio del numero incognito e 180 unità, si ottiene 1540. Quale è il numero cercato?

XXIII. Aggiungendo ad una certa somma di denaro il triplo ed il sestuplo della somma stessa, e diminuendo il resultato ottenuto del doppio e del quintuplo della somma incognita, si otterrebbero 29430 lire. Volendo dividere quella somma in quattro parti in modo che la seconda sia doppia della prima, la terza tripla della seconda e la quarta eguale alla somma delle altre tre, a quanto ammonterà ciascuna parte?

XXIV. Un tale prende moglie a 26 anni e dopo 8 anni di matrimonio ha un figlio. Si domanda dopo quanti anni l'età del padre sarà tripla di quella del figlio.

CAPITOLO V

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ

Prove per 9 e per 11 delle quattro operazioni

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ.

Definizioni e Teoremi generali.

77. Quando il resto di una divisicne è nullo, si dice che il dividendo è divisibile pel divisore; e si vede chiaro che allora il dividendo stesso è eguale al prodotto del divisore per il quoziente. Infatti il dire, per esempio, che 42 diviso per 6 dà per quoziente 7, è lo stesso che dire, che 42 è eguale a sei volte sette o a sette volte sei. Da ciò risulta che un numero divisibile per un altro è (28) un suo multiplo uno dei suoi multipli; e reciprocamente, tutti i multipli di un numero sono evidentemente divisibili per questo numero.

Un numero, che divide esattamente un altro numero, si chiama spesso *divisore* o fattore *sottomultiplo* di quest'altro. Quindi i seguenti modi di dire si equivalgono:

42 è divisibile per 6.
42 è un multiplo di 6.
6 è un divisore di 42.

78. Teorema I. *Se un numero divide esattamente tutte le parti di una somma, divide anche la somma.*

La somma è, in fatti, composta di parti eguali ciascuna a un numero intero di volte il divisore, quindi essa stessa conterrà questo divisore un numero intero

di volte, giacchè la somma di numeri interi è un numero intero.

Esempio. 7 divide 56, 70, 84; dividerà anche la loro somma. Infatti si ha:

$$56 + 70 + 84 = 7 \times 8 + 7 \times 10 + 7 \times 12$$

ossia (**32**)

$$56 + 70 + 84 = 7 \times (8 + 10 + 12).$$

79. Teorema II. *Qualunque numero, che divide un altro numero, divide i multipli di quest' ultimo.*

Giacchè, i multipli di un numero potendo ottenersi aggiungendolo a se stesso un certo numero di volte, è chiaro che i divisori del numero dividono tutte le parti delle somme così formate e, per conseguenza (**78**), le somme medesime.

80. Teorema III. *Qualunque numero, che divide esattamente due altri numeri, divide anche la loro differenza.*

I due termini di questa differenza contengono infatti un numero intero di volte il divisore, quindi la differenza conterrà questo divisore un numero intero di volte, giacchè la differenza di due numeri interi è un numero intero.

Esempio. 8 divide 120 e 48; dividerà anche la loro differenza. Infatti si ha

$$120 - 48 = 8 \times 15 - 8 \times 6$$

ossia (**47**)

$$120 - 48 = 8 \times (15 - 6).$$

Osservazione. *Qualunque numero, che divide esattamente una somma e una delle parti di questa, divide anche l' altra parte.*

Questo teorema non differisce dal precedente che per la forma dell' enunciato, giacchè la seconda parte

della somma può essere considerata come la differenza tra l'intera somma e l'altra parte.

81. Teorema IV. *Se due numeri divisi per un terzo numero danno resti eguali, la loro differenza è divisibile per questo terzo numero; e reciprocamente, se la differenza di due numeri è divisibile per un terzo numero, quei due numeri divisi per il terzo danno resti eguali.*

Se infatti si tolgono dai due numeri dati questi resti, che per supposizione sono eguali, la differenza non muterà (**23**); ma dopo questa sottrazione ambedue i numeri diventano divisibili pel divisore considerato, e, per conseguenza (**80**), la loro differenza è anche divisibile per questo medesimo numero.

Reciprocamente, se la differenza di due numeri è divisibile per un terzo, questi due numeri divisi per il terzo numero danno resti eguali. Si abbiano i due numeri 87 e 65, la cui differenza 22 è divisibile per 11: dico che quei numeri, divisi per 11, debbono dare resti eguali. Infatti potremo considerare 87 come eguale a 65 aumentato della differenza 22; ora è evidente che dividendo per 11 questa somma 60 + 22, la seconda parte 22, essendo divisibile per 11 esattamente e dando per quoziente 2, non influirà sul resto e non farà altro che aumentare il quoziente di due unità; dunque il resto risulterà solamente dalla divisione di 65 per 11. Quindi 87 diviso per 11 dà il medesimo resto che 65 diviso per 11.

La proposizione precedente si può enunciare anche in questo modo; *il resto di una divisione non varia aggiungendo o togliendo al dividendo un multiplo del divisore.*

82*. Teorema V. *Se più numeri divisi per uno stesso divisore danno resti, la somma dei numeri dati e la somma dei resti divise per quel divisore debbono dare resti uguali.*

Siano 90, 68, 47 i numeri dati; dividendo questi numeri per 12, si hanno i resti rispettivi 6, 8, 11; quindi

$$90 = 12 \times 7 + 6,$$
$$68 = 12 \times 5 + 8,$$
$$47 = 12 \times 3 + 11.$$

Sommando queste eguaglianze membro a membro, si trova

$$90 + 68 + 47 = 12 \times 7 + 12 \times 5 + 12 \times 3 + 6 + 8 + 11$$

ossia (**31**)

$$90 + 68 + 47 = 12 \times (7 + 5 + 3) + 6 + 8 + 11;$$

ma $12 \times (7 + 5 + 3) = 12 \times 15$ è un multiplo di 12 e diviso per 12 non dà resto; dunque il resto della divisione di $90 + 68 + 47$ per 12, è lo stesso che quello della divisione per 12 di $6 + 8 + 11$.

83*. Teorema VI. *Se due numeri divisi per uno stesso divisore danno resti, il prodotto dei numeri dati ed il prodotto dei resti, divisi per il divisore, danno resti eguali.*

Siano 68 e 47 i numeri dati e 12 il divisore. Facendo la divisione di questi due numeri per 12, si trova

$$68 = 12 \times 5 + 8,$$
$$47 = 12 \times 3 + 11.$$

Quindi

$$\begin{aligned} 68 \times 47 &= (12 \times 5 + 8) \times (12 \times 3 + 11) \\ &= (12 \times 5 + 8) \times 12 \times 3 + (12 \times 5 + 8) \times 11, \\ &= (12 \times 5 + 8) \times 12 \times 3 + 12 \times 5 \times 11 + 8 \times 11. \end{aligned}$$

Ora tutti i termini del secondo membro, ad eccezione di 8×11, sono multipli di 12; quindi la loro somma è pure un multiplo di 12 (**78**); e per conseguenza potremo scrivere

$$68 \times 47 = \textit{un multiplo di } 12 + 8 \times 11.$$

Ma un multiplo di 12 è divisibile per 12; dunque il resto della divisione di 68×47 per 12 è lo stesso che quello della divisione per 12 di 8×11. Questo ragionamento è generale ed affatto indipendente dai numeri 68, 47, 12.

Ed invero, siano a e b due numeri interi qualunque, d un divisore, q e q' i quozienti della divisione di a e b per d, r ed r' i resti respettivi, avremo:

$$a = q \times d + r,$$
$$b = q' \times d + r';$$

e ancora

$$\begin{aligned} a \times b &= (q \times d + r) \times (q' \times d + r') \\ &= (q \times d + r) \times q' \times d + (q \times d + r) \times r' \\ &= (q \times d + r) \times q' \times d + q \times d \times r' + r \times r' \\ &= \text{un multiplo di } d + r \times r'. \end{aligned}$$

Ma un multiplo di d è divisibile per d, dunque, ecc.

Osservazione. Questo teorema si estende facilmente a più numeri; cioè, *se più numeri divisi per uno stesso divisore danno resti, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti, divisi per il divisore, danno resti uguali.*

Consideriamo i numeri 68, 47, 27, i quali divisi per 12 danno respettivamente 8, 11, 3 per resti; avremo

$$68 = 12 \times 5 + 8,$$
$$47 = 12 \times 3 + 11,$$
$$27 = 12 \times 2 + 3.$$

Dalle due prime eguaglianze si deduce, come innanzi,

$$68 \times 47 = \textit{un multiplo di } 12 + 8 \times 11.$$

Moltiplicando quest' eguaglianza membro a membro per l' altra

$$27 = 12 \times 2 + 3,$$

si otterrebbe egualmente

$$68 \times 47 \times 27 = \textit{un multiplo di } 12 + 8 \times 11 \times 3;$$

la quale eguaglianza dimostra il teorema. Si procederebbe in modo analogo quando i numeri fossero più di tre.

Condizioni di divisibilità per 2, 5, 4, 25, 8 e 125.

84. Il Teorema IV dà il modo di calcolare facilmente il resto di una divisione, quando il divisore è uno dei numeri 2, 5, 4, 25, 8, 125.

1° *Il resto di una divisione per 2 o per 5 si ottiene dividendo per 2 o per 5 la cifra delle unità del dividendo.*

Sia il numero 78917. Si ha

$$78917 = 7891 \times 10 + 7;$$

siccome 10 è divisibile per 2 e per 5, anche 7891×10, che è un suo multiplo, lo è pure, e perciò da questa eguaglianza apparisce evidente che il resto della divisione di 78917 per 2 o per 5, è lo stesso che quello che si ottiene dividendo 7 pei medesimi numeri. Da ciò resulta che 78917 diviso per 2 dà per resto 1, e diviso per 5 dà per resto 2.

Osservazione. Affinchè un numero sia divisibile per 2 o per 5, bisogna che il resto della divisione sia 0, e, per conseguenza, che la cifra delle unità sia divisibile per 2 o per 5.

Le sole cifre divisibili per 2 essendo le cifre pari, perchè un numero sia divisibile per 2, è necessario e

sufficiente che termini per 0 o per cifra pari. E, le sole cifre divisibili per 5 essendo 0 e 5, affinchè un numero sia divisibile per 5, è necessario e sufficiente che termini per 0, o per 5.

2° *Il resto di una divisione per 4 o per 25 si ottiene dividendo per 4 o per 25 il numero espresso dalle due ultime cifre a destra del dividendo.*

Abbiasi il numero 78917. Si ha

$$78917 = 789 \times 100 + 17;$$

siccome 100 è divisibile per 4 e per 25, da questa eguaglianza apparisce chiaro che il resto della divisione di 78917 per 4 o per 25 è lo stesso che quello della divisione di 17 per i medesimi numeri. Ma 17 diviso per 4 dà per resto 1, e diviso per 25 dà per resto 17; dunque 78917 diviso per 4 o 25 dà per resto 1 o 17.

Osservazione. Perchè un numero sia divisibile per 4 o 25, fa d'uopo che il resto della divisione sia 0, e, per conseguenza, che le due ultime cifre a destra formino un numero divisibile per 4 o 25.

I soli numeri di due cifre divisibili per 25 essendo 00, 25, 50 e 75, perchè un numero sia divisibile per 25, è necessario e sufficiente che sia terminato da 00, 25, 50, 75.

3° *Il resto di una divisione per 8 o 125 si ottiene dividendo per 8 o 125 il numero formato dalle tre ultime cifre a destra del dividendo.*

La dimostrazione si fa in modo assolutamente analogo alle due precedenti, osservando che, 1000 essendo eguale a 8×125, qualunque multiplo di 1000 è divisibile per 8 e per 125; e per conseguenza non influisce sul resto della divisione per questi due numeri.

Come nei casi precedenti, si vedrà che la condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero sia divisibile

per 8, è che le tre ultime cifre formino un numero divisibile per 8.

Osservazione. Le dimostrazioni precedenti si fondano sulle proprietà che 10 è divisibile per 2 e per 5; 100 per 4 e 25; 1000 per 8 e 125. Queste verità si possono ammettere come fatti facili a verificare, ma si possono ancora desumere le une dalle altre nel seguente modo:

$$10 = 2 \times 5$$
$$100 = 10 \times 10 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 2 \times 5 \times 2 \times 5$$
$$= 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25$$
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$
$$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125.$$

Condizione di divisibilità per 9

85*. Le condizioni di divisibilità per 9 e per 11 saranno da noi dedotte dai Teoremi V e VI.

Premettiamo le seguenti proposizioni preliminari.

1° *Il resto della divisione per 9 di* 10, 100, 1000, 10000 *ecc., è* 1.

La proposizione è evidente per 10. Ma $100 = 10 \times 10$. dunque (**83***) il resto della divisione per 9 di 100 è eguale a quello di 1×1 diviso per 9, cioè a 1. Lo stesso si dimostrerebbe per 1000, 10000 ecc., osservando che

$$1000 = 100 \times 10, \quad 10000 = 1000 \times 10 \text{ ecc.}$$

2° *il resto della divisione per 9 di un numero composto di una cifra significativa seguíta da uno o più zeri è eguale a questa cifra.*

Abbiasi per esempio 70000. Questo numero è il prodotto di 7 per 10000; ma i resti delle divisioni per 9

Questo è vero, eccetto nel caso che la cifra

di 7 e di 10000 sono rispettivamente 7 e 1, quindi il resto di 70000 diviso per 9 (**83***) è 7.

86*. Ora possiamo dimostrare la proposizione seguente:

Il resto della divisione per 9 di un numero qualunque è dato dalla somma delle sue cifre, considerate nel loro valore assoluto, divisa per 9.

Abbiasi per esempio 72385. Questo numero è uguale a 70000 + 2000 + 300 + 80 + 5; ma i resti rispettivi della divisione per 9 di 70000, 2000, 300, 80 e 5 sono 7, 2, 3, 8 e 5; dunque (**82***) il resto della divisione per 9 di 72385 è dato da 7 + 2 + 3 + 8 + 5 diviso per 9.

Questo teorema può ancora enunciarsi nel seguente modo: *Un numero qualunque è eguale ad un multiplo di 9 più la somma delle sue cifre.*

87. Da questa proposizione risulta evidentemente l'altra che: *affinchè un numero sia divisibile per 9, è necessario e sufficiente che la somma delle sue cifre, considerate nel loro valore assoluto, sia divisibile per 9.*

Condizione di divisibilità per 3

88. *Perchè un numero sia divisibile per 3, è necessario e sufficiente che la somma delle sue cifre, considerate nel loro valore assoluto, sia divisibile per 3.*

Poichè 9 è un multiplo di 3, un numero qualunque (**86***), che è eguale a un multiplo di 9 più la somma delle sue cifre, è anche eguale ad un multiplo di 3 più la somma delle sue cifre; un multiplo di 3 è divisibile per 3; se dunque anche la somma delle cifre è divisibile per 3, il numero dato (**78**) è divisibile per 3.

Condizione di divisibilità per 11.

89*. Prima di enunciare questa condizione stabiliremo due proposizioni preliminari.

1° *Il resto della divisione per 11 dell'unità seguita da un numero pari di zeri è 1, ed il resto della divisione per 11 dell'unità seguita da un numero dispari di zeri è 10.*

La prima parte della proposizione è evidente per 100, poichè $100 = 11 \times 9 + 1$; essendo evidente per 100 è anche evidente per 10000, 1000000 ecc., perchè questi numeri sono rispettivamente eguali a 100×100, $100 \times 100 \times 100$, ecc. (83*).

La seconda parte è evidente per 10; essendo evidente per 10, è anche evidente per 1000, 100000, ecc. perchè $1000 = 10 \times 100$, $100000 = 1000 \times 100$, ecc.

2° *Il resto della divisione per 11 di un numero composto di una cifra significativa seguita da un numero pari di zeri è questa cifra significativa; il resto della divisione per 11 di un numero composto di una cifra significativa seguita da un numero dispari di zeri è la differenza fra 11 e la cifra significativa.*

Abbiasi 70000. I resti respettivi della divisione per 11 di 7 e di 10000 sono 7 e 1, quindi (83*) il resto della divisione per 11 di 7×10000, ovvero di 70000 è 7

Per dimostrare la seconda parte, osserviamo che la proprietà si verifica pei numeri 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Per qualunque altro numero, formato da una cifra significativa seguita da un numero dispari di zeri, si dimostra nel seguente modo. Abbiasi per esempio 700000. I resti respettivi delle divisioni per 11 di 70 e di 10000

sono 4 e 1; dunque (**83***) il resto della divisione per 11 di 70×10000, ovvero di 700000 è 4.

90*. Ora possiamo dimostrare la proposizione che: *il resto della divisione per* 11 *di un numero qualunque si ottiene aggiungendo alla somma delle sue cifre di posto dispari la somma delle differenze fra* 11 *e ciascuna delle sue cifre di posto pari, e dividendo per* 11 *la somma totale.*

Abbiasi per esempio 82145. Questo numero è uguale a $80000 + 2000 + 100 + 40 + 5$; i resti rispettivi delle divisioni per 18 di 80000, 2000, 100, 40 e 5 sono 8, 9, 1, 7 e 5; dunque il resto della divisione di 82145 per 11 è dato (**82***) da $8 + 9 + 1 + 7 + 5$ diviso per 11.

91*. Da questa proposizione risulta evidentemente l'altra: *affinchè un numero qualunque sia divisibile per* 11, *è necessario e sufficiente che sia divisibile per* 11 *la somma delle cifre di posto dispari aumentata della somma delle differenze fra* 11 *e le cifre di posto pari.*

Esempio. Sia il numero 459637; la somma delle cifre di posto dispari è $7 + 6 + 5 = 18$, quella delle differenze da 11 delle cifre di posto pari è $8 + 2 + 7 = 17$; la somma totale è 35; 35 non è divisibile per 11, dunque il numero proposto non è divisibile per 11 e la divisione darebbe per resto 2.

Prove per 9 e per 11

92*. Le proposizioni precedenti danno il modo di effettuare per mezzo dei divisori 9 e 11 la riprova delle quattro operazioni dell'aritmetica. Ragioneremo sul divisore 9, ma ciò che diremo si applicherà egualmente ad 11 e a qualunque altro divisore.

ADDIZIONE. *Per fare la prova per 9 dell' addizione di più numeri si cercano i resti delle divisioni per 9 di questi numeri; dividendo per 9 la somma di questi resti, si deve ottenere lo stesso resto che dividendo per 9 la somma dei numeri proposti.*

Questa regola risulta chiara dal Teorema V.

ESEMPIO. Supponiamo che sommando fra loro i numeri 8963, 3409, 673, si sia trovato per somma 13045; 8963, 3409, 673, divisi per 9, lasciano per resti 8, 7, 7; la somma 13045, divisa per 9, deve dunque dare il medesimo resto che $8 + 7 + 7 = 22$, cioè a dire 4. Il numero 13045 soddisfa a questa condizione, giacchè la somma delle sue cifre è 13.

SOTTRAZIONE. *Per fare la prova per 9 della sottrazione di due numeri si cercano i resti delle divisioni per 9 del diminutore e della differenza trovata; la somma di questi resti ed il diminuendo, divisi per 9, debbon dare lo stesso resto.*

Questa regola risulta evidentemente dall' osservazione, che in una sottrazione il diminuendo è uguale alla somma del diminutore e del resto.

ESEMPIO. Supponiamo che sottraendo 527982 da 769345 si sia trovato per resto 241363; quest' ultimo numero e 527982 divisi per 9 lasciano per resti 1, 6; la loro somma 769345, divisa per 9, deve dunque dare il medesimo resto che $1 + 6 = 7$, cioè 7. Il numero 769345 sodisfa a questa condizione, giacchè la somma delle sue cifre è 34.

MOLTIPLICAZIONE. *Per fare la prova per 9 della moltiplicazione di due numeri si cercano i resti della divisione per 9 del moltiplicando e del moltiplicatore; il prodotto di questi resti ed il prodotto dei numeri proposti divisi per 9 debbon dare lo stesso resto.*

Questa regola è una conseguenza del Teorema VI,

e si applica qualunque sia il numero dei fattori, di cui si vuol verificare il prodotto.

Esempio. Supponiamo che moltiplicando 723 per 87, siasi trovato per prodotto 62901; 723 e 87 divisi per 9 danno per resti 3 e 6; il loro prodotto deve dunque dare il medesimo resto che 3×6 o 18; cioè deve essere divisibile per 9. Il numero 62901 soddisfa a questa condizione, giacchè la somma delle sue cifre è 18.

Divisione. *Per fare la prova per 9 della divisione si cercano i resti della divisione per 9 del divisore, del quoziente e del resto; il resultato che si ottiene facendo il prodotto dei due primi resti ed aggiungendovi il terzo, deve dare, diviso per 9, lo stesso resto che il dividendo.*

Per dimostrare questa regola, supponiamo che, avendo diviso 590549 per 859, siasi trovato 687 per quoziente e 416 per resto. Se la divisione è fatta bene, deve aversi

$$590549 = 859 \times 687 + 416.$$

Pel Teorema V si ha che, trovando i resti delle divisioni per 9 di 859×697 e di 416, la somma di questi resti ed il numero 590549, divisi per 9, debbono dare resti eguali. Ora, il resto della divisione per 9 del prodotto 859×687 si ottiene (Teorema VI) dividendo per 9 il prodotto dei resti delle divisioni per 9 di 859 e di 687. Dunque, trovati i resti della divisione per 9 di 859 e 687, il prodotto di questi resti, unito al resto della divisione per 9 di 416, deve dare, diviso per 9, lo stesso resto del dividendo 590549.

I resti della divisione per 9 di 859, 687, 416 sono 4, 3, 2; aggiungendo il prodotto dei resti 4 e 3 al resto 2, si ha 14 per risultato; questo numero diviso per 9 dà 5 per resto. Se l' operazione è ben fatta, 590549, diviso

per 9, deve dare anche 5 per resto; ciò che ha effettivamente luogo, perchè la somma delle cifre di 590549 è 32.

93. Se la prova per 9 di una operazione non riesce, l'operazione è inesatta; ma il contrario non è sempre vero. Se la prova riesce, fa d'uopo conchiudere solamente che l'errore, quando vi fosse, è un multiplo di 9. Similmente la riuscita della prova per 11 dice solamente che l'errore, quando vi fosse, è un multiplo di 11. Può darsi anche che ambedue le prove riescano, l'operazione non essendo esatta, quando l'errore sia ad una volta multiplo di 11 e di 9,

94. Osservazione. I valori particolari dei numeri 9 e 11 non influiscono sui ragionamenti che precedono; le conchiusioni resterebbero le medesime, considerando altri divisori. La sola ragione, che induce a preferire 9 od 11, è la facilità con la quale si ottengono i resti delle divisioni per questi numeri. I divisori 2, 3, 4, 5, 8, 10, 25, danno anche, è vero, resti facili a calcolare; ma la prova per questi differenti numeri non darebbe ai resultati che una assai piccola probabilità di esattezza.

Il resto di una divisione per 2, 5, 10, 4, 25 e 8 dipende solamente dalla prima, dalle due prime o dalle tre prime cifre a destra; quindi la prova per uno di questi numeri servirebbe alla verificazione di queste sole cifre.

L'esito della prova per 3 farebbe solamente conoscere che l'errore, quando vi fosse, sarebbe un multiplo di 3, e, poichè su tre numeri consecutivi uno è divisibile per 3, il caso la farebbe riuscire spesso per operazioni inesatte. Aggiungiamo di più che, nel caso in cui la prova per 9 è riuscita, la prova per 3 non farebbe conoscere l'errore, se vi fosse; giacchè quando l'errore è un multiplo di 9, è anche un multiplo di 3.

Esercizî

I. Un numero è divisibile per 6, se la cifra delle unità aggiunta a quattro volte la somma di tutte le altre dà una somma divisibile per 6.

II. Un numero è divisibile per 4, se la cifra delle unità aggiunta al doppio della cifra delle decine dà una somma divisibile per 4.

III. Un numero è divisibile per 8, se la cifra delle unità aggiunta al doppio della cifra delle decine ed a quattro volte quella delle centinaia dà una somma divisibile per 8.

IV. Un numero è divisibile per 99, se, separandolo in classi di due cifre cominciando dalla destra, la somma delle classi è divisibile per 99. La stessa regola si applica ai divisori 9 e 11.

V. Un numero è divisibile per 7, se, scomponendolo in gruppi di tre cifre da destra a sinistra, la differenza fra la somma de' gruppi d'ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 7.

VI. La somma dei quadrati di due numeri interi è divisibile per 7 soltanto allora che i due numeri dati sono divisibili per 7.

VII. Moltiplicando due numeri interi consecutivi, il prodotto è sempre pari; prendendo la metà di questo prodotto, si avrà un quoziente che, diviso per 3, non potrà dar mai per resto 2.

VIII. Se un numero a è eguale a un multiplo di un altro numero n aumentato di 1, tutte le potenze di a son pure eguali a multiplo di n più 1.

IX. Se un numero a è eguale a un multiplo di un altro n diminuito di 1, tutte le potenze di grado dispari di a, cioè $a^3, a^5, a^7 \ldots$, sono eguali a multipli di n meno 1; e tutte le potenze di grado pari di a, cioè $a^2, a^4, a^6 \ldots$, sono eguali a multipli di n più 1.

X. a e b essendo due numeri non divisibili per 3, $a^6 - b^6$ è divisibile per 9.

XI. La divisione per 9 di un numero, le cui cifre sono $abcde$, si può ottenere nel seguente modo: si fa la somma delle cifre $a + b + c + d + e$, e si divide per 9; sia q il quoziente ed r il resto; r sarà, come è noto, il resto della divisione proposta. Il quoziente di questa divisione si otterrà aggiungendo q alla somma dei numeri seguenti, $a + ab + abc + abcd$. Per esempio, per dividere 75234 per 9 si farà la somma delle cifre, 21, che, divisa per 9, dà per quoziente 2, e il quoziente sarà $2 + 7 + 75 + 752 + 7523$, cioè a dire 8359.

XII. Se il quadrato di un numero diminuito di 13 è divisibile per 9, questo numero diviso per 9 lascia per resto 2 o 7. La reciproca è vera.

XIII. Due numeri qualunque a e b divisi per la loro differenza $a - b$ danno resti eguali; se ne conchiuderà che a^m e b^m divisi per $a - b$ danno anche il medesimo resto, e che, per conseguenza, $a^m - b^m$ è divisibile per $a - b$, qualunque sia il numero intero m.

XIV. Se, nel fare una moltiplicazione, si dimentica di far retrocedere di un posto le cifre di un prodotto parziale, la prova per 9 riuscirà egualmente. La prova per 9 e la prova per 11 riusciranno anche, quando si fanno retrocedere le cifre di un prodotto parziale di due posti più del convenevole verso la sinistra.

XV. Scrivere una cifra a destra di 567 in modo che il numero resultante sia divisibile per 2 e non per 4; oppure per 4; oppure per 5 e non per 25; oppure per 25; oppure per 8; oppure per 3 e non per 9; oppure per 9; oppure per 11.

XVI. Nel numero 34 x 6 y quali cifre convien sostituire alle lettere x ed y, perchè il numero sia divisibile al tempo stesso per 2, 5 ed 11?

XVII. Determinare la somma de' primi 40 multipli di 15. (Vedi *Esercizio I di ricapitolazione nelle quattro regole e il n. 48** dell'Aritmetica*).

XVIII. Determinare il maggior numero inferiore a 2340, che diviso per 72 dà per resto 37.

XIX. Due multipli di 17 danno per somma 136, ed uno è triplo dell' altro: quali sono i due numeri?

XX. Due numeri divisi per 12 danno lo stesso resto 5: la somma de' due numeri è 118 ed i quozienti, che si ottengono dividendo i due numeri per 12, sono l'uno doppio dell' altro. Trovare i due numeri.

XXI. Quanti sono i multipli di 63 compresi fra 160 e 456, e quali sono?

XXII. Una campana da segnali batte tre colpi di 25 in 25 minuti e comincia a suonare ad ore 7 e 35 minuti antimeridiane. Si vuol sapere quante volte avrà suonato dalle 9 antimeridiane alle 4 pomeridiane.

Due m

CAPITOLO VI

DIVISORI COMUNI DEI NUMERI INTERI

Definizioni

95. Un numero, che divide esattamente altri numeri, si chiama un loro *divisore comune*. Spesso è utile conoscere i divisori comuni a molti numeri, e particolarmente il maggiore tra essi, che chiamasi il loro *massimo comun divisore*.

Teoremi sui quali è fondata la ricerca del massimo comun divisore

96. Teorema I. *Se due numeri sono divisibili l'uno per l'altro, il loro massimo comun divisore è il minore dei due numeri.*

Si abbiano i numeri 42 e 6, che sono divisibili l'uno per l'altro; 6 è evidentemente uno dei loro divisori comuni, e non può esservene uno maggiore, giacchè un numero maggiore di 6 non potrebbe dividere 6. Dunque 6 è il loro massimo comun divisore.

97. Teorema II. *Due numeri non divisibili l'uno per l'altro hanno il medesimo massimo comun divisore, che il minore di essi e il resto della loro divisione.*

Siano i numeri 7524 e 918. Dividendoli l'uno per l'altro, si trova 8 per quoziente e 180 per resto, in guisa che:

$$7524 = 918 \times 8 + 180.$$

Da questa eguaglianza resulta:

1° Che tutti i divisori comuni a 7524 e 918 dividono anche 180; giacchè questi numeri, dividendo 918, dividono il suo multiplo 918×8; essi dividono dunque una somma 7524, e una delle sue parti 918×8, e per conseguenza (**80**) dividono anche l'altra parte, che è 180.

2° Che tutti i divisori comuni a 180 e 918 dividono anche 7524; giacchè questi numeri, dividendo 918, dividono il suo multiplo 918×8 e 180, e, per conseguenza (**78**), dividono ancora la loro somma che è 7524.

Dunque:

Tutti i divisori comuni a 7524 e 918 dividono 180, e per conseguenza sono comuni a 918 e 180.

Tutti i divisori comuni a 180 e 918 dividono 7524, e per conseguenza sono comuni a 7524 e 918.

Queste due proposizioni riunite dimostrano che i divisori comuni a 7524 e 918 sono gli stessi, che quelli comuni a 918 e 180; per conseguenza il massimo comun divisore dei primi due numeri è lo stesso che quello dei due secondi. Ciò che bisognava dimostrare.

Ricerca del massimo comun divisore di due numeri interi

98. Il teorema precedente dà il modo di sostituire ai due numeri, di cui si vuol trovare il massimo comun divisore, due altri più piccoli. Questi ultimi potranno al modo stesso essere sostituiti da altri ancora più piccoli, e così di seguito, sino a che si vengano ad ottenere due numeri divisibili l'uno per l'altro, dei quali il massimo comun divisore è il numero minore (**96**). Possiamo dunque enunciare la regola seguente:

Per cercare il massimo comun divisore di due numeri interi, si divide il maggiore pel minore; se non vi è resto, il numero minore è il loro massimo comun divisore. Se vi è un resto, si divide il numero minore per il resto della prima divisione, e si continua così a dividere ciascun divisore pel resto corrispondente, sino a che una di queste divisioni si faccia esattamente; il divisore di questa divisione è il massimo comun divisore cercato.

99. Perchè questa regola conduca al risultato voluto, bisogna che uno dei resti divida esattamente il precedente; ma ciò accadrà sempre, giacchè i resti essendo tutti interi e decrescenti, il loro numero è necessariamente limitato.

100. Supponiamo, per esempio, di voler trovare il massimo comun divisore dei numeri 7524 e 918. Dividiamo 7524 per 918; si trova 8 per quoziente e 180 per resto; dunque il massimo comun divisore cercato non è 918, ma è uguale al massimo comun divisore di 918 e di 180. Dividiamo allora 918 per 180; troviamo 5 per quoziente e 18 per resto; per conseguenza il massimo comun divisore cercato non è 180, ma è uguale al massimo comun divisore di 180 e di 18. Dividiamo dunque 180 per 18; troviamo 10 per quoziente e 0 per resto; dunque 18 è il massimo comun divisore (**96**) di 180 e 18, e, per conseguenza (**97**), è pure quello di 918 e di 180, e perciò anche di 7524 e di 918.

Si dispongono ordinariamente le divisioni successive sopra una stessa linea orizzontale, e si scrive ciascun quoziente al disopra del divisore, per riserbare il posto al disotto di questo ai resti parziali della divisione successiva, se il quoziente di questa avesse più cifre. Il resto finale di ciascuna divisione, non si scrive al disotto del dividendo, ma alla destra del divisore,

dovendo essere il divisore dell'operazione successiva. Così l'operazione prende la forma seguente:

	8	5	10	
7524	918	180	18	0
7344	18			
180				

Analogamente, se si volesse trovare il massimo comun divisore dei numeri 75204 e 3420, l'operazione verrebbe disposta nel modo appresso indicato:

	21	1	94	
75204	3420	3384	36	0
6804		144		

ed il massimo comun divisore cercato sarebbe 36.

101. Osservazione I. Accade talvolta nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri, che l'operazione termini soltanto quando si giunga a trovare per resto 1; allora questo divide certo esattamente il resto precedente, ed è quindi il massimo comun divisore dei due numeri proposti. In tal caso i due numeri *non hanno altri divisori comuni fuori che l'unità* e si dicono *primi fra loro.*

Esempio. Debbasi cercare il massimo comun divisore fra 437 e 204: avremo secondo la regola data:

	2	7	29	
437	204	29	1	0

quindi 1 è il massimo comun divisore dei numeri dati e perciò essi son *primi fra loro.*

102. Osservazione II. Nella ricerca del massimo comun divisore due resti consecutivi qualunque hanno

lo stesso massimo comun divisore che i numeri proposti (**97**). Se dunque si conosce il massimo comun divisore di due di questi resti, si potrà fare a meno di continuare l'operazione. La pratica del calcolare e la conoscenza dei divisori dei numeri possono solo guidare nell'applicazione di questa osservazione. Uno dei casi più semplici è quello, nel quale un resto fosse primo col resto precedente (**101**). Infatti questi due resti non possono avere allora altro divisore comune che l'unità.

Esempio. Debbasi cercare il massimo comun divisore di 756 e 535.

	1	2	2	2	
756	535	221	93	35	23

essendo i due resti 35 e 23 primi fra loro, perchè 23 è numero *primo* che non divide 35 (**118**), è inutile proseguire l'operazione, ed il massimo comun divisore cercato è 1.

103*. La ricerca del massimo comun divisore di due numeri può, in taluni casi, rendersi più semplice mediante il seguente:

Teorema III. *Il massimo comun divisore di due numeri è lo stesso che quello del minore di essi e della differenza fra un multiplo di quest'ultimo e l'altro numero.*

Questo teorema si dimostrerà in un modo affatto identico a quello che abbiamo tenuto pel Teorema II. Così se i numeri dati sono 312 e 108, prendendo la differenza fra 312 e un multiplo qualunque di 108, per esempio 108×3, si trova 12 per resto, e si ha quindi l'eguaglianza

$$108 \times 3 - 312 = 12, \text{ ovvero, } 312 = 108 \times 3 - 12;$$

dalla quale apparisce chiaro, che il massimo comun divisore di 312 e di 108 è eguale a quello di 108 e di 12.

L'applicazione di questo teorema riesce utile, quando uno dei resti delle divisioni successive, che bisogna effettuare per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri, è maggiore della metà del divisore corrispondente.

Per comprendere ciò, fa d'uopo ricordare che il resto di una divisione è eguale alla differenza fra il dividendo ed il massimo multiplo del divisore, che può esservi contenuto (**54**); la differenza fra il dividendo ed il multiplo del divisore immediatamente superiore ad esso dividendo, unita al resto, dà un numero eguale al divisore. Questo risultato è evidente, e può d'altronde verificarsi agevolmente; tuttavia non sarà inutile darne una dimostrazione generale.

Sieno a e b due numeri interi qualunque, q il quoziente della loro divisione ed r il resto; avremo

$$a = b \times q + r.$$

Chiamiamo r' la differenza fra a e $b \times (q+1)$; avremo

$$a = b \times (q+1) - r' = b \times q + b - r';$$

confrontando queste due eguaglianze, si vede che hanno il primo membro a eguale, ed eguale pure il termine $b \times q$ del secondo membro; dunque dovrà essere pure

$$r = b - r', \text{ ovvero } b = r + r'.$$

Questo risultato dimostra che se $r > \frac{b}{2}$, r' sarà minore di r; quindi tutte le volte che il resto della

divisione di due numeri è maggiore della metà del divisore, invece di sostituire ad a il numero r, come si pratica nel caso generale, sarà utile sostituirvi il numero r'; il quale, in virtù dell'eguaglianza $b = r + r'$, è dato sempre dalla differenza fra il divisore e il resto.

Così, dividendo 312 per 108, si trova 96 per resto; il massimo comun divisore di 312 e di 108, è (Teorema II) il massimo comun divisore di 108 e di 96; ma 96 è maggiore della metà del divisore 108, dunque (Teorema III) potremo sostituire a 312 la differenza fra 108 e 96, cioè 12.

Per conseguenza, il massimo comun divisore di 312 e di 108 è il massimo comun divisore di 12 e 108, cioè a dire è 12, poichè 108 è divisibile per 12.

Possiamo quindi enunciare la seguente regola:

Se nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri una divisione dà un resto maggiore della metà del divisore, si sostituisce a questo resto la differenza che passa fra esso e il divisore.

Applichiamo questa regola alla ricerca del massimo comun divisore dei numeri 35676 e 25812.

	1	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**2**	**2**
35676	25812	9864	3780	1476	648	180	72	36
9864	6084	2304	828	180	108	36	0	
	3780	1476	648		72			

La regola generale (**98**) renderebbe necessarie dodici divisioni per trovare il massimo comun divisore 36; mentre noi l'abbiamo trovato con otto divisioni solamente.

Teoremi
relativi al massimo comun divisore di due numeri

104. Teorema V. *Qualunque divisore comune a due numeri divide anche il loro massimo comun divisore.*

Ciò resulta evidentemente dai teoremi fondamentali, che ci hanno condotto alla regola per la ricerca del massimo comun divisore. Considerando, per esempio, i numeri 7524 e 918, abbiamo provato che i loro divisori comuni dividono (**97**) il resto 180 della loro divisione; dividendo 918 e 180 devon dividere il resto 18 della loro divisione, cioè a dire il massimo comun divisore di 7524 e 918.

105. Teorema VI. *Moltiplicando o dividendo due numeri per uno stesso numero, il loro massimo comun divisore vien moltiplicato o diviso per questo stesso numero.*

1° Abbiansi i numeri 7524 e 918. Le successive divisioni necessarie per la ricerca del massimo comun divisore di questi due numeri danno luogo alle seguenti eguaglianze:

$$7524 = 918 \times 8 + 180$$
$$918 = 180 \times 5 + 18$$
$$180 = 18 \times 10.$$

Ora è noto (**68**) che, moltiplicando per uno stesso numero il dividendo ed il divisore di una divisione, il quoziente rimane inalterato, ed il resto vien moltiplicato per questo numero. Quindi moltiplicando 7524 e 918 per un numero qualunque, per esempio per 3, il

Se due numeri si dividono per il loro massimo
comun divisore il massimo comune divisore di

resto 180 della loro divisione verrà moltiplicato per 3. Similmente allora, essendo moltiplicati per 3 918 e 180, anche il resto 18 della loro divisione verrà moltiplicato per 3. Dunque il massimo comun divisore di $7524 \times 3 = 22572$ e di $918 \times 3 = 2754$ è $18 \times 3 = 54$.

2º La seconda parte del teorema non è che un'altra maniera di enunciare la prima. Infatti invece di dire che moltiplicando 7524 e 918 per 3, anche il loro massimo comun divisore 18 vien moltiplicato per 3, si può dire al contrario, che dividendo per 3 i due numeri 22572 e 2754, anche il massimo comun divisore 54 vien diviso per 3. Si potrebbe anche dimostrare questa seconda parte del teorema in modo analogo alla precedente.

Osservazione. Questo teorema dà il modo di rendere più semplice, in alcuni casi, la ricerca del massimo comun divisore di due numeri. Se, infatti, si vede che i numeri dati ammettono un divisore comune, si dividono per questo numero, e si cerca il massimo comun divisore dei quozienti ottenuti: moltiplicando poi il resultato per il divisore, si ottiene il massimo comun divisore dei numeri proposti.

Esempio. Per cercare il massimo comun divisore di 85200 e 19200, si cercherà il massimo comun divisore di 852 e 192; il resultato essendo 12, ed essendo stati i due numeri divisi per 100, il massimo comun divisore dei numeri proposti è $12 \times 100 = 1200$.

106*. Il teorema precedente può dimostrarsi più in generale nel modo seguente.

Siano a e b due numeri interi qualunque, q il quoziente della loro divisione ed r il resto: q' il quoziente della divisione di b per r ed r' il resto; q'' il quoziente della divisione di r per r' ed r'' il resto: q''' il quoziente della divisione di r' per r'', che supponiamo potersi fare

esattamente; r'' è il massimo comun divisore di a e b. Avremo l' eguaglianze:

$$a = b \times q + r$$
$$b = r \times q' + r'$$
$$r = r' \times q'' + r''$$
$$r' = r'' \times q'''.$$

Ciò posto, moltiplicando o dividendo a e b per un numero qualunque m, il resto r della loro divisione sarà anch' esso moltiplicato o diviso per questo numero. b ed r essendo così moltiplicati o divisi per m, il resto r' della loro divisione sarà pure moltiplicato o diviso per m. Similmente r ed r' essendo moltiplicati o divisi per m, il resto r'' della loro divisione, che è il massimo comun divisore di a e b, sarà pure moltiplicato o diviso per m.

Osserviamo ancora, che l' eguaglianze precedenti posson servire a dimostrare con generalità tutti i teoremi, che abbiamo dati sul massimo comun divisore di due numeri.

107. Osservazione. Dal teorema precedente resulta, che dividendo due numeri per il loro massimo comun divisore, il massimo comun divisore verrà diviso per se stesso e diverrà l' unità; ossia in altre parole: *i quozienti, che si ottengono dividendo due numeri per il loro massimo comun divisore, son primi fra loro.*

Ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi

108*. La ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi si fonda sul seguente

Teorema VII. *Il massimo comun divisore di più numeri interi è lo stesso che quello del massimo comun divisore di due tra essi e dei numeri dati rimanenti.*

Abbiansi, per esempio, i quattro numeri interi A, B, C, D, e sia d il massimo comun divisore di A e di B; dico che il massimo comun divisore dei numeri d, C, D, è anche il massimo comun divisore dei numeri proposti.

In fatti, qualunque divisore comune ai quattro numeri dati, dividendo A e B, divide il loro massimo comun divisore d, e quindi è un divisore comune dei numeri d, C, D. Reciprocamente, qualunque divisore comune dei numeri d, C, D, dividendo d, divide A e B, che sono multipli di d, ed è per conseguenza divisore comune dei numeri proposti.

Quindi i numeri A, B, C, D, hanno gli stessi divisori comuni che i numeri d, C, D; per conseguenza il massimo comun divisore dei primi è eguale al massimo comun divisore dei secondi.

109*. In virtù di questo teorema la ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi è ridotta a quella del massimo comun divisore di due soli numeri.

E invero, ritenute le notazioni precedenti, si è dimostrato che il massimo comun divisore dei numeri interi

$$A, B, C, D,$$

è uguale a quello di

$$d, C, D.$$

Applicando il teorema precedente a questi ultimi tre numeri, e chiamando d' il massimo comun divisore di d e di C, si dimostrerebbe al modo stesso, che il massimo comun divisore di questi tre numeri è eguale a quello di

$$d'\ D.$$

Se dunque s'indica con d'' il massimo comun divisore di questi due numeri, pel Teorema VII si ha che d'' è anche il massimo comun divisore di A, B, C, D.

Esempio. Abbiansi i quattro numeri 360, 600, 1368, 4212.

Il massimo comun divisore di 360 e di 600 è 120; quello di 120 e di 1368 è 24, e finalmente quello di 24 e di 4212 è 12. Dunque 12 è il massimo comun divisore dei quattro numeri proposti.

Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

Per trovare il massimo comun divisore di più numeri, si cerca il massimo comun divisore dei due primi; poi il massimo comun divisore del numero così ottenuto e del terzo dei numeri proposti; e così di seguito, sino a che si siano adoperati tutti i numeri dati. L'ultimo massimo comun divisore ottenuto a questo modo è quello dei numeri proposti.

Avvertiamo che in pratica si comincia l'operazione dei due numeri più piccoli, procedendo via via ai maggiori.

110*. La ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi può, in taluni casi, rendersi più semplice, mediante il seguente:

Teorema VIII. *Il massimo comun divisore di più numeri non cambia, sostituendo ad uno di essi la differenza tra questo numero ed un multiplo di uno degli altri.*

Abbiansi i quattro numeri 360, 600, 1368, 4212. Secondo la regola (**109***), bisogna prima cercare il massimo comun divisore di 360 e 600; ora (**103***) questo massimo comun divisore è uguale a quello di 360 e 120, differenza fra 600 e 2×360. Dunque il massimo comun divisore dei numeri proposti è uguale a quello dei numeri 360, 120, 1368, 4212.

Secondo la regola (**109***) bisogna prima cercare il

massimo comun divisore di due numeri, di 360 e di 1368 per esempio; ora (**103***) questo massimo comun divisore è uguale a quello di 360 e di 72, differenza fra 1368 e 4×360. Dunque il massimo comun divisore dei numeri proposti è eguale a quello dei numeri 360 120, 72, 4212.

Un ragionamento analogo permette di sostituire a 4212 la differenza 108 fra 4212 e 12×360. Dunque il massimo comun divisore dei numeri proposti è uguale a quello dei numeri 360, 120, 72, 108, ovvero dei numeri 120, 72, 108, poichè 360 essendo divisibile per 72, sarà 72 il massimo comun divisore di questi due numeri.

Similmente a 120 e a 108 si possono sostituire le differenze rispettive 24 e 36 fra 2×72, 120 e 108.

Ora è facile vedere che il massimo comun divisore dei numeri 24, 72, 36, è 12.

Quindi possiamo enunciare la regola seguente:

Per cercare il massimo comun divisore di più numeri si dividono per il più piccolo di essi tutti gli altri numeri; a ciascuno dei numeri divisi si sostituisce la minima differenza corrispondente; si opera al modo stesso sui nuovi numeri così ottenuti, e così di seguito. Quando un numero è divisibile per un altro, si sopprime. L' operazione sarà terminata quando resterà un sol numero; questo numero è il massimo comun divisore cercato.

Questa è la regola generale; ma spesso accade che la semplice ispezione dei numeri proposti rende manifesta una combinazione particolare, che facilita considerevolmente l'operazione. Così, nell'esempio proposto, si vede che il quarto numero meno sette volte il secondo dà una differenza 12; quindi al quarto numero si sostituisce 12; e siccome 12 divide i primi tre numeri, 12 è il massimo comune divisore cercato.

Teoremi
relativi al massimo comun divisore di più numeri

111*. Teorema IX. *Qualunque divisore comune a più numeri divide il loro massimo comun divisore.*

Indichiamo infatti con N un divisore comune ai quattro numeri A, B, C, D; abbiamo provato (**108***) che N è anche divisore comune a d, C, D, indicando con d il massimo comun divisore di A e B. Un simile ragionamento proverebbe che N dividendo d, C, D divide anche d' e D, se d' è il massimo comun divisore di d e C; e per conseguenza N divide anche d'', massimo comun divisore di d' e D, che è pure quello dei numeri proposti.

Esempio. I numeri 360, 600, 1368, 4212 hanno per divisori comuni 2, 3, 4, 6, 12, i quali tutti dividono il massimo comun divisore 12 dei numeri dati.

112. Teorema X. *Moltiplicando o dividendo più numeri per uno stesso numero, il loro massimo comun divisore è moltiplicato o diviso per questo stesso numero.*

1° Abbiansi i numeri 360, 600, 1368, 4212, dei quali il massimo comun divisore è 12. Questi quattro numeri moltiplicati per 3, per esempio, diventano 1080, 1800, 4104, 12636; bisogna provare che il loro massimo comun divisore è divenuto 36. In fatti, per ottenere il massimo comun divisore di 360, 600, 1368 e 4212, abbiamo cercato (**109***) il massimo comun divisore di 360 e 600 che è 120; poi il massimo comun divisore di 120 e 1368 che è 24; poi finalmente il massimo comun divisore di 24 e 4212 che è 12. Se ora consideriamo i numeri 1080, 1800, 4104, 12636, per ottenere il loro massimo comun divisore, bisognerà cercare quello di

Se più numeri si dividono per il loro

1080 e 1800 che sarà (**105**) 3×120; poi quello di 3×120 e 4104 che sarà 3×24: poi finalmente quello di 3×24 e 12636 che sarà 3×12.

Ciò che bisognava dimostrare.

2° La seconda parte del teorema non è che un'altra maniera di enunciare la prima. Infatti, invece di dire che, moltiplicando per 3 i numeri 360, 600, 1368, 4212, il massimo comun divisore 12 di questi quattro numeri è moltiplicato per 3, si può dire al contrario che dividendo per 3 i numeri 1080, 1800, 4104, 12636, il massimo comun divisore 36 di questi quattro numeri è diviso per 3. Si può anche dimostrare direttamente questa seconda parte del teorema in modo analogo alla prima.

Questo teorema dà il modo di rendere più semplice, in alcuni casi, la ricerca del massimo comun divisore di più numeri. Se, infatti, si vede che i numeri dati ammettono un divisore comune, si divideranno per questo numero, e si cercherà il massimo comun divisore dei quozienti ottenuti. Moltiplicando poscia il resultato pel divisore, si avrà il massimo comun divisore dei numeri proposti.

ESEMPIO. Per cercare il massimo comun divisore di 18000, 85200 e 19200, si cercherà il massimo comun divisore di 180, 852 e 192; il risultato essendo 12, il massimo comun divisore dei numeri proposti è 1200.

113*. Il teorema precedente si può dimostrare in generale nel modo seguente.

Abbiansi quattro numeri A, B, C, D. Siano d il massimo comun divisore di A e di B, d' il massimo comun divisore di d e di C, d'' il massimo comun divisore di d' e di D: sappiamo che d'' è il massimo comun divisore dei quattro numeri A, B, C, D.

Ciò posto, moltiplichiamo o dividiamo A, B, C,

D per uno stesso numero m. A e B essendo moltiplicati o divisi per m, il loro massimo comun divisore d sarà anche moltiplicato o diviso per m (**105**); d e C essendo moltiplicati o divisi per m, il loro massimo comun divisore d' sarà moltiplicato o diviso per m; infine d' e D essendo moltiplicati o divisi per m, il loro massimo comun divisore d'', che è pure quello dei numeri proposti, sarà pure moltiplicato o diviso per m.

114. Osservazione. *Dividendo più numeri per il loro massimo comun divisore, il massimo comun divisore verrà diviso per se stesso, ossia i quozienti ottenuti avranno per massimo comun divisore l'unità.*

Questa proposizione è una conseguenza evidente del teorema ora dimostrato.

salta a pag. 116

Limite del numero di divisioni alle quali può condurre la ricerca del massimo comun divisore

115. Teorema I. *Nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri ciascun resto è minore della metà di quello che lo precede di due posti.*

Indichiamo con R ed R' due resti consecutivi. Se, attenendosi alla regola generale, si divide R per R', si ottiene un nuovo resto R''; vogliamo provare che R'' è minore della metà di R.

Sia Q il quoziente della divisione di R per R'; avremo

$$R = Q \times R' + R''.$$

Il quoziente Q è almeno eguale ad 1, dunque R è almeno eguale a $R' + R''$; ma necessariamente il divisore R' è maggiore di R'', dunque, ponendo nella egua-

glianza precedente 1 in luogo di Q ed R'' in luogo di R', si ha

$$R > R'' + R', \quad \text{ovvero} \quad R > 2R'',$$

ciò che bisognava dimostrare.

116. Teorema II. *Si avrà un limite del numero di divisioni da effettuare nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri* A *e* B, *formando la serie* 2, 4, 8, 16, ..., *delle potenze di* 2, *e prendendo il doppio del posto del primo dei termini di questa serie, che supera il più piccolo* B *dei numeri proposti.*

Siano infatti

$$R,\ R',\ R'',\ R''',\ R^{\text{IV}} \ldots.$$

resti ottenuti successivamente. Dal teorema precedente si ha

$$B > 2R',\ R' > 2R''',\ R''' > 2R^{\text{V}} \ldots\ldots,$$

e per conseguenza a più forte ragione, ponendo nella diseguaglianza $B > 2R'$ in luogo di R' successivamente $2R'''$ o $4R^{\text{V}}$ e via di seguito,

$$B > 4R''', \quad \text{ovvero} \quad B > 2^2R''',$$
$$B > 8R^{\text{V}}, \quad \text{ovvero} \quad B > 2^3R^{\text{V}};$$

continuando a questo modo si vede facilmente che B è maggiore del prodotto della *ennesima* potenza di 2 pel resto che occupa il posto $2n$. Dunque, se 2^n è maggiore di B, è impossibile fare più di $2n$ divisioni.

Applichiamo questa regola ai numeri 377 e 233.

A quest' oggetto, formiamo le potenze di 2 sino a che se ne trovi una superiore a 233; queste potenze sono

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

L'ottava potenza di 2, 256, essendo maggiore di 233, si vede che la nostra regola indica 16 come limite del numero di divisioni da eseguire. Facendo il calcolo, si trova che il numero di queste divisioni è 12.

Esercizi

I. Dimostrare che il massimo comune divisore di due numeri A, B è eguale al numero dei multipli di B contenuti nella serie

$$A,\ A \times 2,\ A \times 3,\ \ldots\ldots,\ A \times B.$$

II. Formando la serie 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., di cui ciascun termine è la somma dei due precedenti, è impossibile che nell' operazione del massimo comun divisore più di due resti consecutivi cadano tra due stessi termini della serie, e, se ne cadono due, non ve ne sarà nessuno nell' intervallo seguente.

III. Fondandosi sulla proposizione precedente e su quella che è stata enunciata (CAP. I, *Eser*. III), si può provare che l' operazione del massimo comun divisore esige un numero di divisioni eguale al più a cinque volte il numero delle cifre del minore dei due numeri.

IV. Una estensione di terreno di forma rettangolare ha metri 486 di larghezza e metri 1648 di lunghezza. Qual' è la lunghezza della massima misura, che potrebbe esser contenuta esattamente nelle due dimensioni?

V. Un vasto terreno, avente la forma di quadrilatero coi lati lunghi respettivamente metri 8400, metri 6336, 5004, e 2448, si vuol circondare di alberi piantati tutti alla stessa distanza. Qual' è la maggior distanza possibile a cui si posson mettere l' uno dall' altro?

VI. Due numeri hanno per massimo comun divisore 18. Nelle divisioni successive effettuate per ottenerlo si sono

avuti per quozienti respettivi i numeri 1, 1, 5, 10, 2. Quali sono i numeri?

VII. La somma di due numeri è 960; il loro massimo comun divisore è 80: quali sono i due numeri?

VIII. Il prodotto di due numeri è 6480 ed il massimo comun divisore di essi numeri è 12: quali sono i due numeri?

IX. Trovare il più gran numero possibile, per il quale dividendo i numeri 4055, 6927 e 14324, si ottengano respettivamente per resti 135, 207 e 324.

960 : 2 = 480
160

180 | 180
00 | 65

CAPITOLO VII

TEORIA DEI NUMERI PRIMI

Definizioni

117. Un numero intero è detto *primo*, quando non ha altri divisori interi che sè stesso e l'unità.

Esempi. 2, 3, 5, 7, sono numeri primi; 9 non è primo, perchè è divisibile per 3.

Rammentiamo che due numeri son detti *primi fra loro*, quando il loro massimo comun divisore è l'unità.

118. Osservazione. *Un numero primo è primo con tutti i numeri interi che non sono suoi multipli*, poichè, non avendo il numero primo altri divisori che sè stesso e l'unità, il solo divisore comune, che possa ammettere con un numero che egli non divide, è evidentemente l'unità.

Teoremi relativi ai numeri primi

119. Teorema I. *Un numero intero, che non è primo, ammette almeno un divisore primo; e tale è certamente il più piccolo de' suoi divisori, fatta astrazione dall'unità.*

Se infatti un numero non è primo, ammette uno o più divisori diversi da sè stesso e dall'unità: ora è evidente che il minore di questi divisori è primo, poi-

chè, se non fosse tale, ammetterebbe un divisore più piccolo, che dovrebbe dividere il numero proposto.

Abbiasi per esempio il numero 1261; supponiamo che il più piccolo dei suoi divisori (astrazion fatta dall' unità) sia n; è chiaro che n è primo, poichè, se avesse un divisore, p per esempio, p dividendo n dovrebbe (**79**) dividere il suo multiplo 1261, ed n non sarebbe, per conseguenza, il minor divisore di 1261.

120. Osservazione. Un numero primo, essendo divisibile per sè stesso, ammette un divisore primo: possiamo dunque modificare il teorema precedente, dicendo: *qualunque numero, primo o no, ammette almeno un divisore primo.*

121. Teorema II. *Se due numeri non sono primi fra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune.* In fatti, se due numeri non sono primi fra loro, essi ammettono per definizione un divisore comune, che possiamo indicare con n, diverso dall' unità; questo divisore deve ammettere egli pure (**120**) un divisore primo, che chiameremo p, il quale, dividendo n, deve dividere esattamente i due numeri proposti, che son multipli di n: p può essere lo stesso n, se questo è primo.

122. Teorema III. *La serie dei numeri primi è illimitata.*

Supponiamo, se è possibile, che N esprima il più grande di tutti i numeri primi. Formando il prodotto di tutti i numeri primi da 2 fino a N, ed aggiungendo una unità a questo prodotto, avremo:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \ldots\ldots \times N) + 1.$$

Chiamando S il resultato così ottenuto, S ammette un divisore primo (**120**). Ora, questo divisore dev' essere maggiore di N, poichè altrimenti entrerebbe come

fattore nella prima parte di S, cioè nel prodotto $2 \times 3 \times 5 \times .... \times N$ e allora, dividendo la somma S e la prima parte di essa, dovrebbe per conseguenza (**80**) dividere la seconda, che è 1, il che è impossibile. Dunque necessariamente v'è un numero primo maggiore di N, e l'ipotesi che abbiamo fatta non può ammettersi.

Formazione di una tavola dei numeri primi

123. Per formare una tavola di numeri primi, si scrive la serie dei *numeri dispari*, e si cancellano quelli che non sono primi. Scriviamo la serie:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59 61, 63, ...

1° Siccome i numeri pari son divisibili per 2, nessuno di essi è primo e si può fare a meno di scriverli; solamente alla fine dell'operazione rammenteremo che 2 è primo (**117**) e lo aggiungeremo alla tavola.

2° I numeri divisibili per 3, eccettuato 3, non sono primi; dobbiamo dunque cancellare di tre in tre tutti i numeri che vengon dopo, cominciando dal 3 esclusivamente.

3° I multipli di 4, essendo anche multipli di 2, sono già stati cancellati. Dunque cancelleremo i multipli di 5, cioè i numeri di 5 in 5, cominciando dal 5 esclusivamente.

4° Di poi cancelleremo i numeri, non di 6 in 6, perchè sarebbe inutile, ma di 7 in 7, cominciando da 7 esclusivamente, e così toglieremo tutti i multipli di 7.

Continueremo nella stessa maniera, osservando

sempre che è inutile di cancellare i multipli dei numeri che non sono primi, perchè son tutti divisibili per numeri primi, i cui multipli sono stati già cancellati.

124. Osservazione I. Si potrebbe credere che fosse necessario conoscer già la lista dei numeri primi per cancellare i loro multipli. Ma l'operazione stessa ci darà a poco alla volta questi numeri a misura che ne avremo bisogno.

125. È facile infatti riconoscere che, a qualunque momento si arresti l'operazione precedente, si può sempre determinare quali fra i numeri non cancellati sono primi.

Supponiamo, per esempio, che, mediante le operazioni già indicate, si siano cancellati nella serie naturale dei numeri tutti i multipli di 2, di 3, di 5 e di 7; si vuol provare che è primo qualunque numero non cancellato inferiore al quadrato del numero primo 11, immediatamente superiore al numero primo 7, ultimo di quelli, di cui abbiamo cancellato i multipli. Sia infatti A un numero qualunque non cancellato, minore di 11×11 ossia di 11^2; se questo numero non è primo, il più piccolo de' suoi divisori, esclusa l'unità, dev'essere (**119**) un numero primo ed il minimo numero primo, che può dividere A è 11, perchè, se A non è stato cancellato, ciò è provenuto dal non essere questo numero divisibile nè per 2, nè per 3, nè per 5, nè per 7. Quindi A sarà eguale al prodotto di questo suo minimo divisore primo, che chiameremo P, (*almeno* eguale ad 11), per un certo quoziente Q ed avremo

$$A = P \times Q.$$

Ma il quoziente Q, dividendo il prodotto $P \times Q$, è evidentemente un divisore di A e, per conseguenza, deve

essere, per lo meno, eguale a P (perchè abbiamo supposto essere P il minimo divisore di A).

L'eguaglianza

$$A = P \times Q$$

prova dunque che A è il prodotto di due numeri, che sono ambedue *per lo meno* eguali ad 11; ora questo è impossibile, perchè A è minore di 11×11 per ipotesi. Dunque abbiamo fatto una ipotesi assurda ammettendo che A non fosse primo.

Questa dimostrazione è generale; e un simile ragionamento proverebbe egualmente che, dopo avere cancellati i multipli di 11, possiamo riguardare come primi i numeri non cancellati, minori del quadrato di 13; e in generale che, dopo avere cancellato i multipli d'un dato numero primo, possiamo riguardare come primi i numeri non cancellati, minori del quadrato del numero primo immediatamente superiore.

Osservazione II. Questo ci mostra che nella formazione della tavola dei numeri primi si può, nel cancellare i multipli di 5, cominciare da 25, quadrato di 5, perchè i numeri inferiori non cancellati son primi. Nel cancellare i multipli di 7 si può cominciare da 49 per la stessa ragione, e così di seguito.

126. Osservazione III. Giovandosi delle precedenti considerazioni è facile decidere se un numero qualunque dato è primo o no; basterà infatti dividerlo successivamente pei numeri primi 2, 3, 5, 7, ..., i cui quadrati sono minori di esso: se queste divisioni non riescono, il numero proposto è primo.

Quindi in generale possiamo dire che *un numero è primo, quando non è divisibile per alcuno dei numeri*

primi, i cui quadrati sono minori del numero proposto.

Avvertiremo che il quadrato del divisore provato è maggiore del dividendo, quando il quoziente diviene minore del divisore; poichè, chiamando N il dividendo e P il divisore, se N è minore di P^2, il quoziente deve essere minore di P.

127*. Crediamo utile aggiungere qui le seguenti considerazioni.

Indichiamo con n un numero qualunque, che può essere 0, 1, 2, 3, ...; è chiaro che qualunque numero intero si trova compreso nelle due espressioni

$$2 \times n, \qquad 2 \times n \pm 1;$$

la prima dà tutti i numeri pari; la seconda tutti i numeri dispari.

Del resto tutti i numeri interi possono essere rappresentati in più modi. Così le espressioni

$$\begin{array}{ll} 3 \times n, & 3 \times n \pm 1, \\ 4 \times n, & 4 \times n \pm 1, \text{ ecc.} \end{array}$$

possono servire egualmente a rappresentare tutti i numeri interi.

Tutti i numeri primi, eccetto 2 e 3, sono poi compresi nell'espressione,

$$6 \times n \pm 1;$$

cioè a dire che *qualunque numero primo, eccetto* 2 *e* 3, *è un multiplo di* 6 *aumentato o diminuito di una unità.*

La dimostrazione seguente è di Serret.

Il numero 5, essendo eguale a $6-1$, soddisfa a questa condizione. Sia A un numero maggiore di 6. I resti della divisione di A per 6 possono essere 0, 1, 2, 3, 4, 5; se il resto è 0, A è divisibile per 6; se il resto è 2 o 4, A è divisibile per 2; se il resto è 3, A è divisibile per 3. Dunque, se A è primo, il resto della divisione di A per 6 dev' essere 1 o 5. Ora, se A diviso per 6 dà per resto 1, è eguale a un multiplo di 6 aumentato di 1; se A diviso per 6 dà per resto 5, è uguale a un multiplo di 6 più 5, o, ciò ch' è lo stesso, a un multiplo di 6 diminuito di uno.

Conviene però avvertire che non tutti i numeri compresi nell'espressione $6 \times n \pm 1$ sono primi. Per esempio, 49 è della forma $6 \times n + 1$ e non è primo.

128*. Da lungo tempo si sono costruite delle Tavole di numeri primi, vista la loro importanza non solamente pei matematici di professione ma ancora pei calcolatori pratici. Le più conosciute sono quelle di *Chernac* e di *Burckhardt;* in Weimar ne ha pubblicata una più economica il signor Schaller. Le Tavole di Chernac contengono i numeri primi e i divisori degli altri numeri sino a 100000. Quelle di Burckhardt contengono i numeri primi da 1 a 3036000 ed i più piccoli divisori degli altri numeri. Dall'ispezione di queste Tavole risulta che vi sono 26 numeri primi da 1 a 100; 169 da 1 a 1000; 1230 da 1 a 10000; 9592 da 1 a 100000; e 78493 da 1 a 1000000.

Trascriviamo qui una tavola dei numeri primi da 3 a 1229, alla quale, per completarla, fa d'uopo aggiungere i numeri primi 1 e 2.

Tavola dei numeri primi fino a 1229

1-2									
3	79	181	293	421	557	673	821	953	1091
5	83	191	307	431	563	677	823	967	1093
7	89	193	311	433	569	683	827	971	1097
11	97	197	313	439	571	691	829	977	1103
13	101	199	317	443	577	701	839	983	1109
17	103	211	331	449	587	709	853	991	1117
19	107	223	337	457	593	719	857	997	1123
23	109	227	347	461	599	727	859	1009	1129
29	113	229	349	463	601	733	863	1013	1151
31	127	233	353	467	607	739	877	1019	1153
37	131	239	359	479	613	743	881	1021	1163
41	137	241	367	487	617	751	883	1031	1171
43	139	251	373	491	619	757	887	1033	1181
47	149	257	379	499	631	761	907	1039	1187
53	151	263	383	503	641	769	911	1049	1193
59	157	269	389	509	643	773	919	1051	1201
61	163	271	397	521	647	787	929	1061	1213
67	167	277	401	523	653	797	937	1063	1217
71	173	281	409	541	659	809	941	1069	1223
73	179	283	419	547	661	811	947	1087	1229

Teoremi relativi alla teoria dei numeri primi

129. **Teorema IV.** *Un numero, che divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno dei fattori, divide necessariamente l'altro.*

Sia P un numero ~~primo~~, che divide il prodotto $A \times B$ ed è primo con A; bisogna provare che divide B.

L'unità è, per ipotesi, il massimo comun divisore di P e di A; moltiplicando questi due numeri per B, il loro massimo comun divisore sarà moltiplicato per B (**105**) e diverrà per conseguenza eguale a B; dunque il massimo comun divisore di $P \times B$ e di $A \times B$ è B; ora P divide evidentemente $P \times B$; divide pure, per ipotesi, $A \times B$; esso divide dunque (**104**) il loro massimo comun divisore B. Ciò che bisognava dimostrare.

130. Teorema V. *Un numero primo, che divide un prodotto di due fattori, divide necessariamente uno dei fattori.*

Sia P un numero primo, che divide un prodotto $A \times B$. Se P non divide A, essendo P numero primo, è primo con A (**118**), e quindi, pel teorema precedente, divide B. Dunque P divide A o B in tutti i casi.

131. Teorema VI. *Un numero primo, che divide un prodotto di più fattori, divide necessariamente uno dei fattori.*

Consideriamo, per esempio, un prodotto di quattro fattori $A \times B \times C \times D$, divisibile per un numero primo P; potendo questo prodotto essere considerato come formato di due fattori $(A \times B \times C)$ e D, se P non divide D (**130**) divide $A \times B \times C$; ma questo nuovo prodotto pure può esser considerato come composto di due fattori $(A \times B)$ e C, e, se P non divide C, deve dividere $A \times B$, e, per conseguenza (**130**), A o B. P divide dunque, in tutti i casi, uno dei fattori.

132. Osservazione I. *Un numero primo, che divide una potenza di un numero, divide questo numero.*

Questa proposizione è conseguenza del teorema precedente, perchè, una potenza di un numero essendo il prodotto di più fattori eguali ad esso, se un numero primo divide questo prodotto, deve dividere uno dei fattori di esso, ossia deve dividere la base della potenza.

133. Osservazione II. *Un numero primo, che divide un prodotto di fattori primi, è necessariamente eguale ad uno di essi.*

Poichè, per dividere il prodotto, deve (**131**) dividere uno dei fattori, e questi fattori, essendo primi, non sono divisibili che per se stessi e per l'unità.

134. Teorema VII. *Un numero, che è primo con tutti i fattori di un prodotto, è primo col prodotto; e reciprocamente, un numero primo con un prodotto è primo con ciascun fattore di questo prodotto.*

1° Sia un prodotto $A \times B \times C \times D$, e P un numero primo con ciascuno dei fattori A, B, C e D. Se P ed il prodotto $A \times B \times C \times D$ non fossero primi fra loro, avrebbero (**121**) almeno un divisore *primo* comune K. K, essendo primo e dividendo il prodotto $A \times B \times C \times D$, dovrebbe dividere (**131**) almeno uno dei fattori di questo prodotto, A per esempio; ma allora A e P avrebbero il divisore comune K, e non sarebbero, contro all'ipotesi, primi fra loro. V'è dunque contradizione ad ammettere che P ed $A \times B \times C \times D$ abbiano un divisore comune.

2° Sia P un numero primo col prodotto $A \times B \times C \times D$; dico che P è primo con ciascuno dei fattori A, B, C, D. Ed invero, supponendo che P ed A non fossero primi tra di loro essi avrebbero un divisore comune K: K, dividendo A, dovrebbe dividere il suo multiplo $A \times B \times C \times D$, il che è contrario all'ipotesi.

135. Osservazione I. *Un numero primo, che non divide un numero, non può dividere le potenze di questo; e reciprocamente un numero primo, che non divide una potenza di un numero, non può dividere questo numero.*

Questa proposizione è una conseguenza evidente del teorema ora dimostrato.

136. Osservazione II. *Le potenze di due numeri primi tra di loro sono anche prime tra loro.*

Infatti, se due numeri sono primi tra loro, due qualunque delle loro potenze non avranno fattori primi comuni e saranno, per conseguenza, prime fra loro.

Di questa proposizione può darsi anche un' altra dimostrazione, per taluni forse più chiara.

preferire questa dimostrazione

Siano A e B due numeri primi tra loro; le loro potenze A^3 e B^5 sono anche prime tra loro. Ed invero, se non fossero tali, dovrebbero ammettere un divisore *primo* comune, che chiameremo D (**121**). D dividendo A^3 dividerebbe A, e dividendo B^5 dividerebbe B (**132**); quindi A e B avrebbero un divisore comune D, ciò ch'è contrario all' ipotesi.

137. Teorema VIII. *Un numero divisibile per più altri, primi fra loro due a due, è divisibile per il loro prodotto.*

Sia N un numero divisibile per più altri, A, B, C, primi fra loro due a due. N essendo divisibile per A, si avrà, indicando con Q un quoziente intero,

$$N = A \times Q;$$

il prodotto $A \times Q$, essendo eguale a N, sarà divisibile anche per B, e per conseguenza B, essendo primo con A, dovrà (**129**) divider Q, di maniera che, indicando con Q_1 un quoziente intero, si avrà

$$Q = B \times Q_1;$$

sostituendo questo valore di Q nell' espressione di N, questa diviene

$$N = A \times B \times Q_1.$$

Il prodotto $A \times B \times Q_1$, essendo eguale ad N, sarà divisibile per C; ma il numero C è primo con A e B, dun-

que lo sarà con $A \times B$ (**134**), e per conseguenza dovrà (**129**) dividere Q_1; si avrà dunque, indicando con Q_2 il quoziente intero della divisione di Q_1 per c,

$$Q_1 = C \times Q_2.$$

Sostituendo questo valore di Q_1 nell'espressione di N, questa diviene

$$N = A \times B \times C \times Q_2,$$

il che dimostra che N diviso per $A \times B \times C$ dà un quoziente intero Q_2, cioè la proposizione enunciata.

Osservazione*. Da questo teorema e da quelli dimostrati nel Capitolo V si posson dedurre le condizioni di divisibilità dei numeri per 2×3, 5×3, 2×9, 5×9, 2×11, 5×11, 9×11, $2 \times 3 \times 11$, ecc.... e in generale per tutti quei numeri, che si possono scomporre in prodotti di fattori primi fra loro a due a due, dei quali siano note le condizioni di divisibilità. Per esempio, 66 essendo il prodotto dei numeri 2, 3 e 11, che sono primi tra loro, perchè un numero sia divisibile per 66 è necessario e sufficiente che sia divisibile per 2, per 3 e per 11. Quindi la condizione di divisibilità di un numero per 66 è che la somma delle sue cifre sia divisibile per 3, che la somma delle sue cifre di posto dispari e delle differenze da 11 delle sue cifre di posto pari sia divisibile per 11, e finalmente che la cifra delle unità sia 0, 2, 4, 6, o 8.

Decomposizione di un numero in fattori primi

138. Teorema IX. *Qualunque numero non primo è eguale ad un prodotto di fattori primi.* Il che si esprime, dicendo *che si può risolvere in fattori primi.*

Indichiamo con N un numero non primo. Questo numero ha almeno (**119**) un divisore primo P, e, per conseguenza, chiamando Q il quoziente della divisione di N per P, avremo

$$N = P \times Q.$$

Se Q è primo la proposizione è dimostrata; N è il prodotto di due numeri primi. Se Q non è primo, ha (**119**) almeno un divisore primo P_1; per conseguenza, Q_1 indicando un quoziente intero,

$$Q = P_1 \times Q_1.$$

Sostituendo questo valore di Q nell'eguaglianza precedente, si ha

$$N = P \times P_1 \times Q_1.$$

Se Q_1 è primo, la proposizione è dimostrata; N è il prodotto di tre numeri primi; se Q_1 non è primo, esso ha almeno un divisore primo P_2; per conseguenza, indicando con Q_2 un quoziente intero,

$$Q_1 = P_2 \times Q_2.$$

Sostituendo questo valore di Q_1 nell'eguaglianza precedente, si ha

$$N = P \times P_1 \times P_2 \times Q_2.$$

Continueremo così fino a che uno dei quozienti Q, Q_1, Q_2, sia primo; la qual cosa non può non accadere dopo un certo numero di operazioni, poichè altrimenti questi numeri interi, che sono decrescenti, formerebbero una serie illimitata, ciò che è impossibile.

139. Osservazione. Nella dimostrazione precedente nulla richiede l'ipotesi che i numeri indicati da

P, P_1, P_2 abbiano valori diversi. Il medesimo fattore può figurare più volte nel prodotto.

Esempio. Applichiamo il ragionamento precedente al numero 60:

1° 60 ammette il divisore primo 2, e si ha

$$60 = 2 \times 30;$$

2° 30 ammette il divisore primo 2, e si ha

$$30 = 2 \times 15,$$

e per conseguenza,

$$60 = 2 \times 2 \times 15;$$

3° 15 ammette il divisore primo 3, e si ha

$$15 = 3 \times 5;$$

per conseguenza,

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5;$$

5 essendo primo, l'operazione è terminata.

140*. Teorema X. *Un numero non può risolversi in fattori primi che in una sola maniera.*

Vogliamo provare che non vi possono essere due prodotti di fattori primi differenti, che rappresentino uno stesso numero: cioè che, se $A \times B \times C \times D \ldots.$ e $a \times b \times c \times d \ldots.$ son due prodotti di fattori primi, che rappresentano lo stesso numero N, essi devono essere *identici*, cioè composti degli stessi fattori primi, contenuti in ciascuno di essi uno stesso numero di volte.

Infatti, se $A \times B \times C \times D \ldots..$ e $a \times b \times c \times d \ldots..$ rappresentano lo stesso numero N, dovrà aversi $A \times B \times C \times D \ldots.. = a \times b \times c \times d \ldots..$ Ora il numero

primo a, dividendo il prodotto $a \times b \times c \times d$....., deve anche dividere il prodotto eguale $A \times B \times C \times D$......, e quindi (133) dev'essere eguale ad uno dei fattori A, B, C, D, ... Supponiamo che sia $a = A$. Sopprimendo questi fattori eguali, il che vale lo stesso che dividere il primo prodotto per A ed il secondo per a (70), che sono quantità eguali, otterremo una nuova eguaglianza $B \times C \times D .... = b \times c \times d$...., dalla quale in un modo analogo si dedurrà che b dev'essere eguale ad uno dei fattori B, C, D, ... ; e così di seguito. Dunque i fattori dei due prodotti sono eguali ciascuno a ciascuno. Ed è questo che bisognava dimostrare.

141. Osservazione. La riduzione in fattori primi costituisce un vero sistema di numerazione dei numeri interi, per mezzo del quale tutti possono essere espressi, e non possono esserlo che in una sola maniera. Questo sistema, assai incomodo per le operazioni le più semplici, si presta qualche volta agevolmente alle operazioni più complicate dell'aritmetica. Noi esporremo alcune delle sue applicazioni; ma prima bisogna indicare il modo pratico di risolvere un numero in fattori primi, poichè, fino ad ora, ci siamo limitati soltanto a mostrarne la possibilità.

Modo di risolvere un numero in fattori primi

142. Per risolvere un numero in fattori primi, si prendono i numeri primi per ordine di grandezza, e si prova se dividono il numero dato. Quando una divisione riesce, si effettua, e, nelle operazioni seguenti, il quoziente è sostituito al numero proposto. Una seconda divisione, che riesce, permette di sostituire a questo quoziente un numero più semplice ancora; si continua allo stesso modo fino a che si trova un quoziente primo.

Questo quoziente è l'ultimo dei fattori, che si cercano, e gli altri sono i divisori successivamente impiegati. Basterà un esempio a rendere questo metodo più chiaro.

Debbasi risolvere in fattori primi il numero 25480: si provi in prima il divisore 2; la divisione riesce e dà per quoziente 12740. Si ha dunque:

$$25480 = 2 \times 12740.$$

Si provi la divisione di 12740 per 2, che riesce ancora e dà per quoziente 6370. Si ha dunque:

$$12740 = 2 \times 6370,$$

e, per conseguenza, sostituendo nell'eguaglianza precedente in luogo di 12740 il suo valore 2×6370,

$$25480 = 2 \times 2 \times 6370.$$

6370 è ancora esso divisibile per 2, e si ha:

$$6370 = 2 \times 3185;$$

per conseguenza, sostituendo,

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 3185:$$

3185 non è divisibile nè per 2, nè per 3, ma per 5, e si ha:

$$3185 = 5 \times 637;$$

per conseguenza

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 637:$$

637 non è divisibile per 5, ma lo è per 7, e si ha:

$$637 = 7 \times 91;$$

per conseguenza

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 91;$$

91 è egualmente divisibile per 7, e si ha:

$$91 = 7 \times 13,$$

e, per conseguenza,

$$25480 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 13:$$

13 essendo numero primo, l'operazione è effettuata.

Questa eguaglianza può ancora scriversi;

$$25480 = 2^3 \times 5 \times 7^2 \times 13.$$

L'operazione si dispone ordinariamente nel seguente modo:

$$\begin{array}{r|l} 25480 & 2 \\ 12740 & 2 \\ 6370 & 2 \\ 3185 & 5 \\ 637 & 7 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \end{array}$$

Osservazione I. **Lo stesso divisore va provato più volte di seguito, come nell'esempio precedente i divisori 2 e 7, fino a che cessi di dare un quoziente intero. Ma poscia non bisogna più provarlo, perchè, i quozienti successivi essendo divisori gli uni degli altri, un numero, che non divide uno di essi, non può dividere i seguenti.**

Osservazione II. Quando si vedono due fattori, di cui un numero è il prodotto, si possono risolvere separatamente e riunire i resultati in un solo prodotto.

Esempio. Sia da risolvere il numero 2400. $2400 = 24 \times 100$. Basta dunque risolvere 24 e 100; ma

$$24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$$
$$100 = 4 \times 25 = 2^2 \times 5^2$$

dunque

$$2400 = 2^3 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^5 \times 3 \times 5^2.$$

Condizione affinchè due numeri siano divisibili l' uno per l' altro

143. *Perchè due numeri siano divisibili l' uno per l' altro, è necessario e sufficiente che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore, elevati ad un esponente per lo meno eguale a quello, che hanno nel divisore.*

1° Questa condizione è necessaria: se infatti s' immagina che il dividendo, il divisore ed il quoziente siano risoluti in fattori primi, il dividendo, essendo il prodotto del divisore per il quoziente, è il prodotto di tutti i fattori di questi due numeri. Tutti i fattori del divisore figurano dunque nel dividendo un numero di volte almeno eguale a quello in cui compariscono nel divisore, ossia debbono trovarsi nel dividendo stesso elevati ad un esponente almeno eguale a quello, che hanno nel divisore.

2° Questa condizione è sufficiente: infatti, se essa è soddisfatta, il quoziente sarà intero ed eguale al prodotto dei fattori, che si trovano nel dividendo senza trovarsi nel divisore, per quelli, che entrano nell' uno e nell' altro di questi due numeri, elevati ad un esponente eguale alla differenza fra gli esponenti, che hanno in questi numeri, trascurando quelli, che hanno nei due numeri esponente eguale.

Esempio. $3^3 \times 7^2 \times 13^4 \times 19^2 \times 37$, diviso per $3^3 \times 13^2 \times 19$, darà per quoziente $7^2 \times 13^2 \times 19 \times 37$, poichè, moltiplicando il numero così ottenuto per il divisore, si avrà un prodotto formato, come il dividendo, di tre fattori 3, due fattori 7, quattro fattori 13, due fattori 19, e un fattore 37.

Composizione del massimo comun divisore di più uumeri

144. Dalla proposizione precedente resulta che i fattori primi dei divisori comuni a più numeri debbono essere comuni a questi numeri, e che i loro esponenti debbono essere *al più* eguali a quelli, che essi hanno nel numero dove si trovano coll'esponente minore. Il massimo comun divisore, essendo il più grande fra i divisori comuni, è dunque il prodotto dei fattori primi comuni ai numeri dati presi con esponenti *precisamente* eguali a quelli, che essi hanno nel numero dove compariscono coll'esponente minore.

Esempio. Siano i numeri $2^3 \times 5^2 \times 19 \times 37^2$, $2^2 \times 7 \times 19^3 \times 37^4 \times 57$, $2^4 \times 11^2 \times 19 \times 37$; i fattori primi comuni a questi tre numeri sono 2, 19 e 37; 2 è contenuto 2 volte, e i due altri fattori 19 e 37 son contenuti una sola volta in quello dei numeri, nel quale si trovano col minimo esponente. Il massimo comun divisore è dunque $2^2 \times 19 \times 37 = 2812$.

Osservazione I. I più fra i teoremi relativi al massimo comun divisore di due o più numeri, dimostrati nel Capitolo VI, divengono quasi evidenti, quando si pensano questi numeri risoluti in fattori primi. Tuttavia noi non svolgeremo questo modo di dimostrazione, perchè pensiamo che l'abitudine alle considerazioni di questo genere è una delle cause della difficoltà, che gli

scolari trovano nell' estendere a quantità qualunque le proposizioni relative ai numeri interi.

145. Osservazione II. *Il massimo comun divisore di due numeri non si altera, moltiplicando o dividendo uno di essi per un fattore primo con l'altro;* poichè con ciò non s'introduce, nè si sopprime alcun fattore primo comune. Se dunque, nella ricerca del massimo comun divisore, vien fatto di scorgere in un resto dei fattori primi col resto successivo, questi fattori si potranno sopprimere.

Formare tutti i divisori primi e non primi di un numero

146. Abbiasi il numero $3 \times 7^3 \times 11^4 \times 13^2$. I divisori di questo numero (**143**) hanno per fattori primi 3, 7, 11 e 13: il primo fattore 3 non vi può entrare più di una volta, il secondo 7 non più di tre volte, il terzo 11 non più di quattro volte, e il quarto 13 non più di due volte. Se dunque scriviamo la tavola seguente:

3			
7	$\mathbf{7^2}$	$\mathbf{7^3}$	
11	$\mathbf{11^2}$	$\mathbf{11^3}$	$\mathbf{11^4}$
13	$\mathbf{13^2}$		

moltiplicando due a due, tre a tre, o quattro a quattro, i numeri presi in linee orizzontali differenti, e prendendo, oltre a questi prodotti, i numeri scritti nella tavola stessa, avremo tutti i divisori del numero proposto.

Scrivendo l'unità in ciascuna linea orizzontale della

tavola, si dà più regolarità all'operazione, e si ha allora:

1	3			
1	7	7^2	7^3	
1	11	11^2	11^3	11^4
1	13	13^2.		

Dopo avere scritto così l'unità in capo ad ogni linea, possiamo dire che *tutti* i divisori del numero si otterranno, moltiplicando quattro fattori presi respettivamente nelle quattro linee orizzontali; poichè per formare quelli, nei quali non entrano uno o più fattori primi 3, 7, 11, o 13, basterà prendere l'unità per fattore nelle linee corrispondenti.

Per formare questi divisori si procederà nella maniera seguente: si moltiplicheranno tutti i numeri della prima linea per ciascuno di quelli della seconda ciò che nel caso attuale darà otto prodotti. Si moltiplicheranno questi otto prodotti per ciascuno dei cinque numeri della terza linea, il che darà 5 volte 8 o 40 prodotti, che bisognerà moltiplicare pei tre numeri della quarta linea, ciò che darà in tutto 3 volte 40 o 120 prodotti, che sono i soli divisori del numero proposto

In generale, *per formare tutti i divisori di un numero si risolve questo numero in fattori primi; si forma una tavola composta di una serie di linee orizzontali, che cominciano tutte per l'unità e che contengono le successive potenze di ciascuno di questi fattori primi, dalla prima fino a quella, che figura nel numero proposto; in seguito si moltiplicano tutti i numeri della prima linea per ciascuno di quelli della seconda; poi tutti questi prodotti per ciascuno dei numeri della terza linea, e così di seguito; gli ultimi prodotti, ottenuti*

moltiplicando pei numeri scritti nell' ultima linea della tavola, sono tutti i divisori cercati.

Esempio. Trovare tutti i divisori del numero 4200.

Risolvendolo in fattori primi si ha:

$$4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7.$$

Formando la tavola nel modo già detto si ha.

$1 \,.\, 2 \,.\, 2^2 \quad 2^3$		$1 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 8$
$1 \,.\, 3$	ossia	$1 \,.\, 3$
$1 \,.\, 5 \,.\, 5^2$		$1 \,.\, 5 \,.\, 25$
$1 \,.\, 7$		$1 \,.\, 7.$

Moltiplicando i numeri della prima linea per ciascuno di quelli della seconda, si ottiene

1	2	4	8
3	6	12	24.

Moltiplicando questi prodotti per ciascun numero della terza fila (ed osservando che il loro prodotto per 1 ci dà per resultato i numeri già scritti), si hanno i nuovi prodotti

5	10	20	40
15	30	60	120
25	50	100	200
75	150	300	600.

Moltiplicando tutti questi 24 prodotti per i numeri della terza fila, (risparmiandoci al solito di moltiplicare per 1, perchè si ritrovano i prodotti già scritti qui so-

pra), si hanno dalla moltiplicazione per 7 i nuovi prodotti:

7	14	28	56
21	42	84	168
35	70	140	280
105	210	420	840
175	350	700	1400
525	1050	2100	4200,

ed i 48 prodotti ottenuti sono i divisori cercati.

Numero dei divisori di un numero intero

147. Abbiasi un numero intero N decomposto in fattori primi nella maniera seguente:

$$N = a^m \times b^n \times c^p,$$

ove a, b e c sono i fattori primi e i loro esponenti sono indicati dalle lettere m, n, p.

Se, conformemente alla regola precedente, si forma la tavola:

$$\begin{array}{cccccc} 1 \,. & a \,. & a^2 \,. & a^3 & .\,. & a^m \\ 1 & b & b^2 & b^3 & .\,. & b^n \\ 1 & c & c^2 & c^3 & .\,. & c^p, \end{array}$$

la prima linea conterrà $m+1$ numeri; la seconda $n+1$, la terza $p+1$. Quindi, moltiplicando tutti i numeri della prima linea per ciascuno di quelli della seconda, avremo in tutto $(m+1) \times (n+1)$ prodotti; ciascuno di questi prodotti, moltiplicato per i termini della terza linea, produrrà $p+1$ prodotti; il loro numero sarà dunque moltiplicato per $p+1$ e diverrà:

$$(m+1) \times (n+1) \times (p+1).$$

Questo è dunque il numero dei divisori. In generale, *il numero totale dei divisori di un numero si ottiene, aggiungendo una unità agli esponenti dei fattori primi del numero dato e formando il prodotto dei numeri così ottenuti.*

Così noi abbiamo trovato nell' esempio precedente

$$4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7;$$

per conseguenza il numero totale dei divisori di 4200 è $(3+1)\times(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=4\times2\times3\times2=48$.

Osserv. I. Nel numero $(m+1)\times(n+1)\times(p+1)$ dei divisori è compresa l'unità, che si ottiene moltiplicando fra loro i primi termini delle diverse linee, ed il numero dato, che resulta dalla moltiplicazione di tutti gli ultimi termini delle linee stesse.

148. Osservazione II. *Il numero dei divisori di un numero è pari, a meno che i fattori primi di questo numero abbiano tutti esponenti pari.* Se, infatti, all' esponente di uno dei fattori primi, supposto impari, si aggiunge una unità, la somma sarà pari, e, per conseguenza, il numero dei divisori, nella cui espressione questa somma entra come fattore, sarà divisibile per 2. Vedremo in seguito che i numeri, di cui tutti i fattori primi hanno esponenti pari, sono quadrati. La proposizione precedente può dunque enunciarsi, dicendo:

Il numero totale dei divisori di un numero è pari, a meno che questo numero sia un quadrato perfetto.

Si può dare, *a priori*, la ragione del teorema precedente.

Il numero totale dei divisori di un numero è pari, perchè è doppio del numero di maniere nelle quali si può risolvere questo numero in un prodotto di due fattori. Consideriamo per esempio il numero 60. Qualunque divisore di 60 può essere considerato come uno

dei fattori di un prodotto eguale a 60; ma a ciascuna riduzione di 60 in un prodotto corrispondono due fattori e perciò due divisori. Se, per esempio, si ha

$$60 = 4 \times 15,$$

ciò prova che 60 diviso per 4 dà per quoziente 15, e che 60 diviso per 15 dà per quoziente 4; 4 e 15 sono dunque due divisori di 60; si vede quindi che il numero totale dei divisori è doppio del numero di riduzioni possibili. Il ragionamento è generale. Non v'è eccezione che nel caso in cui il numero considerato è un quadrato. Poichè, quando i due fattori del prodotto divengono eguali, non dobbiamo contarli che per uno nella serie dei divisori.

149. Osservazione. I due divisori, che formano un gruppo, hanno per prodotto il numero considerato, che in conseguenza è più grande del quadrato del minore e minore del quadrato del più grande. Da ciò resulta che fra i divisori di un numero la metà hanno un quadrato minore, e l'altra metà un quadrato maggiore di questo numero.

Multipli comuni a due numeri. — Minimo comune multiplo

150. Un numero divisibile per più altri si chiama loro *multiplo comune;* spesso è utile conoscere i multipli comuni a più numeri, e particolarmente il *minimo* tra essi, che chiamasi il loro *minimo multiplo comune.*

151. Teorema. *Indicando due numeri interi con* A *e* B, *con* D *il loro massimo comun divisore*, *e con* Q *e* Q' *i quozienti ottenuti, dividendo* A *e* B *per* D, *qualunque multiplo comune ai numeri dati è un multiplo del prodotto* $D \times Q \times Q'$. divisibile

per D q q'

Infatti si ha;

$$A = D \times Q;\quad B = D \times Q'.$$

Indicando con m un numero intero, i multipli di A sono tutti della forma $A \times m$ (**29**), cioè a dire, (mettendo in luogo di A il suo valore $D \times Q$), della forma $D \times Q \times m$. Perchè questo prodotto, oltre che essere multiplo di A, sia anche multiplo di B, bisogna fare in modo che sia anche divisibile per B, cioè a dire per $D \times Q'$. La divisione di $D \times Q \times m$ per $D \times Q'$ potrà effettuarsi dividendo prima $D \times Q \times m$ per D, poi il risultato per Q' (**71**). La divisione per D dà per quoziente $Q \times m$ basterà quindi che questo quoziente sia divisibile per Q'; ma Q' è primo con Q, dunque (**129**) dovrà dividere il fattore m, e, per conseguenza, dovrà essere m multiplo di Q', ossia, essendo k un numero intero, dovrà essere

$$m = Q' \times k.$$

Sostituendo ad m questo valore, si ottiene per la forma più generale, che possa avere un multiplo comune a due numeri A e B,

$$D \times Q \times Q' \times k,$$

ciò che dimostra la proposizione enunciata.

È poi evidente che questa espressione rappresenta, qualunque sia k, un multiplo comune ad A e B; giacchè, dividendola per $D \times Q$ e $D \times Q'$, i quozienti ottenuti sono rispettivamente i numeri interi $Q' \times k$ e $Q \times k$.

152. Osservazione. k essendo un numero intero, il minimo valore che si può dare a k è 1, dunque il minimo multiplo comune corrisponde al valore $k = 1$,

ed è, per conseguenza, $D \times Q \times Q'$. Il prodotto dei numeri A e B è uguale a $D \times Q \times D \times Q'$, ed il quoziente della sua divisione per D è evidentemente il minimo multiplo comune, che abbiamo ottenuto. Possiamo dunque enunciare i teoremi seguenti:

1° *Il minimo multiplo comune a due numeri è eguale al prodotto di questi due numeri diviso pel loro massimo comun divisore.*

2° *Gli altri multipli comuni sono i multipli del minimo multiplo.*

rollario

Se i due numeri dati sono primi tra loro, è chiaro che il loro minimo multiplo comune è il prodotto stesso di questi numeri.

Esempio. Abbiansi i numeri 312 e 108, dei quali il massimo comun divisore è 12. Il minimo multiplo di questi due numeri è $\frac{312 \times 108}{12}$, o ciò ch è lo stesso $\frac{312}{12} \times 108 = 26 \times 108 = 2808$. Gli altri multipli sono 2808×2, 2808×3, ...

Multipli comuni a più di due numeri

153*. Teorema. *Il minimo multiplo comune a più numeri interi è lo stesso che quello del minimo multiplo di due tra essi e dei numeri dati rimanenti.*

Abbiansi, per esempio, i quattro numeri A, B, C, D, e sia M il minimo multiplo comune ai due primi; dico che il minimo multiplo comune ai numeri M, C, D è anche il minimo multiplo dei numeri proposti.

Infatti, qualunque multiplo comune ai numeri A, B, C, D, essendo un multiplo di A e di B, è anche un multiplo del loro minimo multiplo comune M (**152**); esso è dunque un multiplo comune dei numeri M, C,

D. Reciprocamente, qualunque multiplo comune ai numeri M, C, D, essendo un multiplo di M, è un multiplo di A e di B, che sono divisori di M; esso è dunque un multiplo comune ad A, B, C, D.

Quindi i numeri A, B, C, D, hanno gli stessi multipli comuni che i numeri M, C, D; dunque il minimo multiplo comune degli uni, è anche il minimo multiplo comune degli altri.

154*. In virtù di questo teorema, la ricerca del minimo multiplo comune a più numeri interi è ridotta a quella del minimo multiplo comune a due soli numeri.

Ed invero, ritenute le notazioni precedenti, si è dimostrato che il minimo multiplo comune ai numeri interi

$$A, B, C, D$$

è uguale a quello di

$$M, C, D.$$

Applicando il teorema precedente a questi ultimi tre numeri e chiamando M' il minimo multiplo comune a M e a C, si dimostrerebbe al modo stesso che il minimo multiplo comune a questi tre numeri, o ciò che è lo stesso, il minimo multiplo dei quattro numeri proposti è uguale a quello di

$$M', D.$$

Possiamo quindi enunciare la seguente regola:

Per trovare il minimo multiplo comune a più numeri bisogna prima cercare il minimo multiplo comune a due fra essi; poi il minimo multiplo comune al numero così ottenuto e ad un terzo dei numeri proposti; e così di seguito, sino a che siansi adoprati tutti i numeri.

L'ultimo minimo multiplo comune ottenuto a questo modo è quello dei numeri proposti.

OSSERVAZIONE I. *Tutti i multipli comuni a più numeri sono divisibili pel minimo tra essi.*

Dal teorema precedente (**153***) resulta, che qualunque multiplo comune ai numeri A, B, C, D è un multiplo comune ad M, C, D; per la stessa ragione è un multiplo comune ai numeri M' e D; e, per conseguenza, è divisibile pel minimo multiplo di questi due numeri.

OSSERVAZIONE II*. *Il minimo multiplo comune a più numeri primi fra loro* a due a due *è eguale al prodotto di questi stessi numeri.*

Applicazione della riduzione dei numeri in fattori primi alla ricerca del minimo multiplo comune

155. Per trovare il minimo multiplo comune a più numeri, si può ancora *risolverli in fattori primi e formare il prodotto di tutti i fattori, che compariscono in essi, prendendo ciascun fattore col maggiore esponente, col quale figura nei numeri dati.*

Abbiansi, per esempio, i numeri

$$200 = 2^3 \times 5^2,\ 500 = 5^3 \times 2^2,\ 147 = 3 \times 7^2.$$

Il loro minimo multiplo è: $2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7^2 = 147000$.

Infatti questo prodotto è evidentemente divisibile per ciascuno dei numeri dati (**143**): di più qualunque numero divisibile per 200, 500 e 147, deve contenere almeno il fattore 2^3, che si trova in 200; il fattore 5^3, che si trova in 500, e i fattori 3 e 7^2, che si trovano in 147 (**143**): quindi non può essere minore del prodotto di questi fattori, che è, per conseguenza, il minimo multiplo comune ai numeri dati.

Esercizi

I. Se n indica un numero intero qualunque, il prodotto $n(n+1)(2n+1)$, è divisibile per 6.

II. a e b indicando due numeri interi, il prodotto $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ è divisibile per 30.

III. Se i divisori di un numero si dispongono per ordine di grandezza, cominciando dall' unità, che è il minimo di questi divisori, e terminando col numero stesso, che è il maggiore, il prodotto di due divisori, presi in questa serie ad egual distanza dagli estremi, è costante ed eguale al numero stesso.

IV. Il quadrato di un numero primo diminuito di un' unità è sempre divisibile per 12; (2 e 3 fanno eccezione).

V. Il quadrato di un numero dispari diminuito di 1 è sempre divisibile per 8.

VI. Se due numeri a e b son primi (eccettuato il 2 ed il 3), la somma a^2+b^2 dei loro quadrati è divisibile per 2; la differenza a^2-b^2 per 24 ed il prodotto $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ per 48.

VII. La somma di tutti i numeri interi, minori di un numero intero p, è $p\,(p-1): 2$.

VIII. La somma di tutti i numeri interi, minori di un numero dispari p, è divisibile per p.

IX. Per trovare il massimo comun divisore di tre numeri, A, B e C, si può procedere nella maniera seguente: formare i C primi multipli di A e di B:

$$A,\ 2A,\ 3A,\ \ldots\ldots\ CA,$$
$$B,\ 2B,\ 3B,\ \ldots\ldots\ CB,$$

e cercare quante volte i due numeri corrispondenti in queste due linee sono simultaneamente divisibili per C.

Questo numero di volte è il massimo comun divisore domandato.

X. Per trovare il massimo comun divisore tra un numero A ed il prodotto di molti altri $M \times N \times P$, possiamo cercare il massimo comun divisore D di A e di M, dividere A per D, e cercare il massimo comun divisore D' del quoziente Q e di N; dividere Q per D', e cercare il massimo comun divisore D'' del quoziente Q' e di P; il massimo comun divisore di A e di $M \times N \times P$ sarà $D \times D' \times D''$.

XI. Se a e b indicano due numeri interi primi fra loro, $a^2 - ab + b^2$ ed $a + b$ non possono avere altri fattori primi comuni che 3.

XII. Se sulla circonferenza di un circolo si segna un numero m di punti, che si uniscono di n in n; 1° Si finirà sempre per tornare al punto di partenza; 2° Se m e n sono primi fra loro, non ci si tornerà che dopo avere incontrato tutti gli altri punti di divisione; 3° Se ciò non ha luogo, il numero dei punti *incontrati* sarà un divisore del numero m.

XIII. Il prodotto di tutti i numeri interi consecutivi, da 1 fino a $p - 1$, è sempre divisibile per p, se p non è primo, e non lo è mai nel caso contrario.

XIV. Se due numeri a e b sono primi fra loro, il massimo comun divisore di $a + b$ e di $a - b$ è al più eguale a 2.

XV. In quante maniere un numero può risolversi in un prodotto di due fattori primi fra loro? Provare che questo numero di maniere è $2^{n-1} - 1$, n essendo il numero dei fattori primi distinti, che dividono il numero proposto.

XVI. Il prodotto di n numeri interi consecutivi, è sempre divisibile pel prodotto degli n primi numeri: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots n$.

XVII. Il prodotto $2 \times 6 \times 10 \times 14 \ldots \times 18 \times (4n - 6)$ è divisibile, qualunque sia n, per $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots n$.

XVIII. a e b essendo due numeri primi, vi sono $(a - 1)(b - 1)$ numeri primi con $a \times b$, e minori di $a \times b$.

XIX. Se a, b, c, d indicano quattro numeri primi

con un quinto p, posto che $a \times b - a' \times b'$ ed $a - a'$ siano divisibili per p, anche $b - b'$ sarà divisibile per p.

XX. Determinare la somma ed il prodotto di tutti i divisori di un numero.

XXI. Se due numeri si moltiplicano o si dividono per uno stesso numero, il loro minimo comune multiplo vien moltiplicato o diviso per questo numero stesso.

XXII. Se il minimo comune multiplo di due numeri si divide per ciascuno di essi, si ottengono due quozienti primi fra loro. Reciprocamente; se un numero diviso per altri due dà quozienti primi fra loro, esso è il minimo multiplo comune dei numeri dati.

XXIII. Se un numero è divisibile per più numeri primi fra loro a due a due, esso è divisibile per il loro minimo multiplo comune.

XXIV. Il minimo multiplo comune a tre numeri è eguale al loro prodotto moltiplicato per il loro massimo comun divisore e diviso per il prodotto dei massimi comuni divisori di quei numeri, considerati a due a due.

XXV. Il minimo multiplo comune a quattro numeri è eguale al loro prodotto moltiplicato per il prodotto dei massimi comuni divisori di questi numeri considerati a tre a tre, e diviso per il prodotto dei massimi comuni divisori degli stessi numeri, considerati a due a due.

XXVI. Trovare un numero, sapendo che esso deve esser costituito dai fattori 2, 3 e 7 e che deve avere 8 divisori.

XXVII. Trovare un numero, sapendo che deve esser divisibile per 12 e che deve avere 25 divisioni.

XXVIII. Una festa si celebra in un paese ogni 24 anni; in un altro ogni 30, ed in un terzo ogni 18 anni. Nel 1891 la festa cadde nello stesso giorno in tutti e tre i paesi. Dopo quanto tempo si verificherà di nuovo questo fatto?

XXIX. Due corpi, che rotano nella stessa direzione sopra un circolo, passano per uno stesso punto A, il primo ogni 15 minuti e l'altro ogni 20. Il primo è passato per

quel punto alle 7, e l'altro alle 7 e 5 minuti. A che ora passeranno di nuovo insieme per quel punto ed ogni quanto tempo accadrà la stessa cosa?

XXX. Due numeri hanno per minimo multiplo comune 2520 ed il loro prodotto è 181440. Quali sono i due numeri?

XXXI. Due numeri hanno per massimo comune divisore 12 e per minimo multiplo comune 3780. Quali sono i due numeri?

CAPITOLO VIII

TEORIA DELLE FRAZIONI

Definizioni

156. Dividendo una grandezza in parti eguali, la riunione di un certo numero di queste parti si chiama una *frazione* di questa grandezza. Il valore di una frazione dipende dal numero delle parti nelle quali la grandezza è stata divisa, che si chiama il suo *denominatore*, e dal numero di quelle parti che sono state riunite, che chiamasi il suo *numeratore*. Il numeratore e il denominatore di una frazione si chiamano anche i suoi due *termini*.

Per scrivere una frazione si scrive il numeratore al di sopra del denominatore e si separano con una linea orizzontale; per enunciarla, si legge prima il numeratore, e si aggiunge il nome del denominatore seguito dalla desinenza *esimi*.

ESEMPIO. Se l'unità si divide in quattordici parti eguali, la riunione di dieci di queste parti si rappresenta con $\frac{10}{14}$, che si legge *dieci quattordicesimi*.

Vi ha eccezione pei denominatori 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, pei quali si dice *mezzo*, *terzo*, *quarto*, *quinto*, *sesto*, *settimo*, *ottavo*, *nono*, *decimo*.

Quando una grandezza è una frazione dell'unità, questa frazione è il numero, che le serve di misura. Questo numero è astratto, quando non s'indica la specie dell'unità. Quando si opera sopra numeri astratti,

bisogna intendere che l'unità, alla quale si riferiscono, non è stata fissata, ma potrà esserlo ulteriormente in un modo qualunque.

157. Osservazione I. La definizione delle frazioni non suppone il denominatore maggiore del numeratore. Per esempio, $\frac{11}{3}$ è una frazione che esprime undici volte il terzo dell'unità.

Osservazione II. I numeri interi si possono considerare come frazioni aventi per denominatore l'unità; per esempio, 3 è eguale a $\frac{3}{1}$.

Qualunque numero intero si può considerare anche come una frazione avente per denominatore un numero dato. Abbiasi per esempio 2, che vogliamo trasformare in una frazione avente per denominatore 7; siccome l'unità è eguale a 7 settimi, 2 unità sono eguali a 2×7 settimi, cioè a $\frac{2 \times 7}{7}$ o $\frac{14}{7}$. Quindi possiamo dire che:

Per trasformare un intero in una frazione, che abbia per denominatore un numero dato, basta moltiplicare l'intero per questo numero, e dare al prodotto questo stesso numero per denominatore.

158. Osservazione III. Questo ci dà il modo di ridurre un *numero misto*, cioè composto di una parte intera e di una parte frazionaria in una sola frazione impropria; se avremo, per esempio, $8 + \frac{5}{6}$ o, come si suole anche scrivere in pratica, $8\frac{5}{6}$, poichè per quanto abbiamo detto precedentemente 8 unità valgono $\frac{8 \times 6}{6}$, il numero $8 + \frac{5}{6}$ sarà eguale a $\frac{8 \times 6 + 5}{6} = \frac{53}{6}$.
Quindi possiamo dire che:

Per ridurre un numero misto ad una sola frazione impropria si moltiplica la parte intera per il denomi-

natore della parte frazionaria, si aggiunge al prodotto il numeratore di questa, ed al resultato ottenuto si dà per denominatore il denominatore della parte frazionaria.

Teoremi relativi alle frazioni

159. Teorema I. *Una frazione è eguale al quoziente della divisione del suo numeratore pel suo denominatore.*

Per esempio, $\frac{15}{7}$ è il settimo di 15: infatti, il settimo di 15 contiene il settimo di ciascuna delle quindici unità che compongono 15, cioè a dire 15 volte $\frac{1}{7}$ o $\frac{15}{7}$.

Questo teorema si può provare ancora nel modo seguente: si ha (**40**)

$$15 \times 7 = 7 \times 15,$$

cioè a dire che 15 *unità* ripetute 7 volte danno lo stesso prodotto che 7 *unità* ripetute 15 volte. Se dunque si prende per unità $\frac{1}{7}$, (e ciò può farsi, poichè l'unità è una quantità completamente arbitraria), si vede che 15 *settimi* ripetuti 7 volte danno lo stesso prodotto che 7 *settimi*, ossia 1 intero, ripetuto 15 volte, cioè che $\frac{15}{7}$ moltiplicati per 7 danno per prodotto 15, e che, per conseguenza, per la proprietà fondamentale della divisione, $\frac{15}{7}$ sono il settimo di 15, ossia il quoziente della divisione di 15 per 7.

160. Il teorema precedente può enunciarsi in un altro modo. *Moltiplicando una frazione pel suo denominatore, si ottiene per prodotto il numeratore.*

Infatti, dire che $\frac{15}{7}$ è il settimo di 15, vale lo stesso che dire che $\frac{15}{7}$ ripetuto sette volte, ossia moltiplicato per 7, dà per prodotto 15.

161. Osservazione. Dal teorema precedente si deduce in generale, che, *il quoziente di una divisione è eguale alla parte intera del quoziente, aumentata di una frazione avente per numeratore il resto e per denominatore il divisore.*

Sia, per esempio, da dividere 43 per 9; il quoziente intero è 4 ed il resto 7, cioè a dire che il nono di 43 si compone di 4 unità, più un nono di 7; esso è dunque $4+\frac{7}{9}$.

Da ciò si deduce che, quando una frazione è maggiore dell'unità, si può ridurla a un numero intero aumentato di una frazione minore dell'unità, applicando l'osservazione precedente alla divisione del suo numeratore per il suo denominatore. Questa operazione dicesi *estrazione degl'interi.*

Esempio. $\frac{73}{5}=14+\frac{3}{5}$.

162. Teorema II. *Aggiungendo o togliendo un numero intero al numeratore di una frazione, essa viene aumentata o diminuita. Invece aggiungendo o togliendo un numero al denominatore della frazione essa viene diminuita o aumentata.*

Questa proprietà è evidente, perchè, se si aggiunge o si toglie un numero al numeratore della frazione, rimanendo lo stesso il numero delle parti eguali in cui è divisa l'unità (denominatore), si prende di queste parti un numero maggiore o minore. Invece, se si aggiunge o si toglie un numero al denominatore della frazione, rimanendo lo stesso il numero delle parti

eguali, che si prendono di quelle in cui è stata divisa l'unità (numeratore), queste parti crescono o diminuiscono di numero e quindi diminuiscono o crescono in grandezza e perciò la frazione viene diminuita o aumentata.

Esempio. $\frac{7}{19}$ è minore di $\frac{7+5}{19} = \frac{12}{19}$ e maggiore di $\frac{7-3}{19} = \frac{4}{19}$.

Invece $\frac{11}{15}$ è maggiore di $\frac{11}{15+6} = \frac{11}{21}$ e minore di $\frac{11}{15-3} = \frac{11}{12}$.

163. Teorema III. *Aggiungendo o togliendo uno stesso numero intero ad ambedue i termini di una frazione, se questa è propria, cresce o diminuisce in valore, mantenendosi però sempre minore dell'unità: e, se è impropria, diminuisce o cresce in valore, mantenendosi sempre maggiore dell'unità.*

È evidente innanzi tutto che, aggiungendo o togliendo uno stesso numero ad ambedue i termini della frazione, secondochè il numeratore era minore o maggiore del denominatore prima dell'operazione effettuata, resta tale anche dopo e perciò la frazione resta propria od impropria.

Ora, se, per esempio, nella frazione propria $\frac{7}{9}$ aggiungiamo 5 ad ambedue i termini, si ottiene $\frac{12}{14}$; a questa mancano $\frac{2}{14}$ per arrivare a formare un'unità, mentre a quella data mancano $\frac{2}{9}$, che son più di $\frac{2}{14}$; dunque la frazione ottenuta è maggiore della proposta, perchè più prossima ad 1. Ne vien come conseguenza che, togliendo uno stesso numero ad ambedue i termini di una frazione propria, questa viene diminuita.

Invece abbiasi la frazione impropria $\frac{11}{8}$ e si aggiunga 3 ad ambedue i termini, si ottiene la frazione $\frac{14}{11}$, che supera l'unità di $\frac{3}{11}$, mentre $\frac{11}{8}$, frazione data, la superava di $\frac{3}{8}$, che son più di $\frac{3}{11}$, dunque $\frac{11}{8}$ è maggiore di $\frac{14}{11}$ e la frazione è stata diminuita. Ne consegue che, togliendo uno stesso numero ad ambedue i termini di una frazione impropria, questa viene aumentata.

164. Teorema IV. *Se si moltiplica o si divide il numeratore di una frazione per un numero intero, la frazione è moltiplicata o divisa per questo numero.*

Infatti, il denominatore restando lo stesso, le parti dell'unità, che compongono la frazione, conservano lo stesso valore; se dunque se ne prende un numero due, tre, quattro volte.... maggiore o minore, il resultato sarà due, tre, quattro volte.... maggiore o minore.

Esempio. $\frac{15}{7}$ è il triplo di $\frac{5}{7}$ e $\frac{5}{7}$ è il terzo di $\frac{15}{7}$.

165. Teorema V. *Se il denominatore di una frazione si moltiplica o si divide per un numero intero, la frazione è divisa o moltiplicata per questo numero.*

1° Sia, per esempio, la frazione $\frac{5}{9}$: bisogna provare che moltiplicando il denominatore per 4 si ottiene una frazione, $\frac{5}{36}$, che è il quarto della prima.

Infatti, se, dopo aver diviso l'unità in 9 noni, si divide ciascuno di essi in quattro parti eguali, si otterranno in tutto 36 parti eguali, che saranno, per conseguenza dei trentaseiesimi dell'unità. Dunque $\frac{1}{36}$ è il quarto di un nono, e per conseguenza, $\frac{5}{36}$ sono il quarto di $\frac{5}{9}$.

2° Consideriamo la frazione $\frac{7}{12}$: bisogna provare che dividendo il denominatore per 4, si ottiene la fra-

$\frac{4}{7} : 5 = \frac{4}{7 \cdot 5} = \frac{4}{35}$

$\frac{4}{35} \cdot 5 = \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{35} + \frac{1}{35} + \frac{1}{35}\right) 5 -$

zione $\frac{7}{3}$, che è il quadruplo della prima; infatti, la dimostrazione precedente prova che $\frac{7}{12}$ è il quarto di $\frac{7}{3}$; dunque $\frac{7}{3}$ è il quadruplo di $\frac{7}{12}$.

166. Osservazione. Per moltiplicare una frazione per un numero intero, si può (**164**) moltiplicare il suo numeratore o (**165**) dividere il suo denominatore per questo numero intero. Il primo metodo è sempre applicabile; ma il secondo esige che il denominatore sia divisibile pel moltiplicatore considerato.

Per dividere una frazione per un numero intero, si può (**165**) moltiplicare il suo denominatore o (**164**) dividere il suo numeratore per questo numero intero. Il primo metodo è sempre applicabile; ma il secondo richiede che il numeratore sia divisibile pel divisore considerato.

Esempî. Dovendo moltiplicare $\frac{5}{12}$ per 4 avremo:

$$\frac{5}{12}\times 4=\frac{5\times 4}{12}=\frac{20}{12}$$

oppure

$$\frac{5}{12}\times 4=\frac{5}{12:4}=\frac{5}{3}$$

E dovendo dividere $\frac{15}{7}$ per 5 avremo:

$$\frac{15}{7}:5=\frac{15}{7\times 5}=\frac{15}{35}$$

oppure

$$\frac{15}{7}:5=\frac{15:5}{7}=\frac{3}{7}.$$

167. Teorema VI. *Il valore di una frazione non varia, moltiplicando o dividendo ambedue i suoi termini per uno stesso numero.*

Abbiasi la frazione $\frac{9}{15}$: dividendo il suo numeratore per 3 si ottiene $\frac{3}{15}$, che è (**164**) il terzo di $\frac{9}{15}$; se poi si divide il denominatore per 3, il risultato $\frac{3}{5}$ è (**165**) il triplo di $\frac{3}{15}$ e per conseguenza eguale a $\frac{9}{15}$.

Si proverebbe al modo stesso che non si altera il valore di una frazione, moltiplicando i suoi due termini per uno stesso numero.

Due frazioni aventi lo stesso valore sotto forma diversa come $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{15}$ si dicono *equivalenti*.

Riduzione di una frazione alla sua più semplice espressione

168. Una frazione si può (**167**) rendere più semplice, dividendo i suoi due termini per uno stesso numero. Se questo numero è il loro massimo comun divisore, i due termini diventando primi tra loro (**107**), non potranno più impiccolirsi con lo stesso metodo. Il teorema seguente prova di più che è impossibile, in qualunque modo, di dare alla frazione una forma più semplice.

169. Teorema VII. *Una frazione, i cui termini sono primi tra loro, è irriducibile, cioè a dire che è impossibile esprimerla con termini minori; e di più ogni frazione equivalente ad essa deve avere i suoi termini multipli eguali di quelli della frazione data.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{19}{28}$, i cui termini sono primi tra loro, e supponiamo che sia eguale ad un' altra frazione $\frac{a}{b}$, in guisa che si abbia:

$$\frac{a}{b} = \frac{19}{28}$$

$\frac{m}{n}$ ipotesi i termini sono primi fra loro

sia $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ infatti ...

Moltiplicando per b i due membri di quest'eguaglianza, i prodotti saranno eguali: ma $\frac{a}{b}$ moltiplicato per b dà (**160**) per prodotto a; $\frac{19}{28}$ moltiplicato per b dà per prodotto $\frac{19 \times b}{28}$; avremo dunque:

$$a = \frac{19 \times b}{28}.$$

In questa eguaglianza a è intero, dunque 28 divide esattamente il prodotto $19 \times b$; ma è primo con 19, dunque (**129**) divide b, e si ha, indicando con q un quoziente intero, $b = 28 \times q$. Il valore di a diventa allora, sostituendovi in luogo di b $b \times q$,

$$a = \frac{19 \times 28 \times q}{28} = 19 \times q.$$

Dunque a e b sono maggiori di 19 e 28, ed eguali ai loro prodotti per uno stesso numero intero q.

170. Osservazione. Da ciò che precede risulta, che per formare tutte le frazioni equivalenti ad una data frazione basta rendere questa frazione irriducibile, e poi moltiplicare i suoi due termini per la serie dei numeri interi, 2, 3, 4, ...

Per ridur... una fra... ad una fra... irriduci... si divide... i termini... il loro M.

Esempio. Per formare tutte le frazioni eguali a $\frac{25}{170}$, si divideranno i due termini di questa frazione pel loro massimo comun divisore 5; e diverrà $\frac{5}{34}$; $\frac{5}{34}$ essendo irriducibile, le sole frazioni che le sieno eguali sono $\frac{10}{68}$, $\frac{15}{102}$, $\frac{20}{136}$ ecc.

Riduzione di due o più frazioni allo stesso denominatore

171. *Ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore significa trovare altre frazioni, rispettiva-*

mente equivalenti alle prime, e che abbiano uno stesso denominatore. Questa riduzione può sempre effettuarsi.

Consideriamo prima due frazioni, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{11}$. Per ridurle al medesimo denominatore, è evidente che basta moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel denominatore dell' altra; infatti le due frazioni

$$\frac{5\times 11}{8\times 11}=\frac{55}{88} \quad \text{e} \quad \frac{3\times 8}{11\times 8}=\frac{24}{88},$$

formate a questo modo, sono equivalenti rispettivamente alle date, ed hanno lo stesso denominatore 88.

Se le frazioni sono più di due, si moltiplicheranno i due termini di ciascuna di esse pel prodotto dei denominatori di tutte le altre, ed allora il denominatore comune sarà uguale al prodotto dei denominatori dati.

Esempio. Siano le frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$; operando come si è detto, le nuove frazioni saranno

$$\frac{5\times8\times4\times6}{7\times8\times4\times6},\ \frac{3\times7\times4\times6}{8\times7\times4\times6},\ \frac{3\times7\times8\times6}{4\times7\times8\times6},\ \frac{1\times7\times8\times4}{6\times7\times8\times4};$$

ovvero, effettuando le moltiplicazioni

$$\frac{960}{1344},\ \frac{504}{1344},\ \frac{1008}{1344},\ \frac{224}{1344}.$$

172*. Osservazione. Quando si vogliono paragonare due frazioni fra di loro è necessario ridurle prima allo stesso denominatore. Così, per esempio, se si volesse sapere quale delle frazioni $\frac{9}{11}$ e $\frac{12}{17}$ è la maggiore, bisognerebbe ridurle prima allo stesso denominatore, e le frazioni $\frac{153}{187}$, $\frac{132}{187}$, che ne risultano, mostrano chiaramente che la prima è maggiore della seconda.

Riduzione delle frazioni al minimo denominatore comune

173. Supponiamo le frazioni date ridotte alla loro più semplice espressione, cioè a dire ridotte a frazioni irriducibili; ciascuna di esse non può essere equivalente (**169**) che a frazioni, i cui termini siano equimultipli dei suoi. Un denominatore comune deve dunque essere ad una stessa volta multiplo di tutti i denominatori così ridotti, ed il più piccolo valore che possa avere è il loro minimo multiplo comune. Per dare alle frazioni questo denominatore comune, bisognerà moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel quoziente della divisione del minimo multiplo comune ai denominatori per il denominatore della frazione considerata.

Esempio. Riprendiamo le frazioni $\frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$, che sono irriducibili. Il minimo multiplo comune dei loro denominatori è 168. Perchè le frazioni acquistino questo denominatore, si moltiplicheranno i due termini della prima per $\frac{168}{7}$ o 24, quelli della seconda per $\frac{168}{8}$ o 21; quelli della terza per $\frac{168}{4}$ o 42; e quelli della quarta per $\frac{168}{6}$ o 28; allora diventano

$$\frac{120}{168}, \frac{63}{168}, \frac{126}{168}, \frac{28}{168}.$$

Addizione e sottrazione delle frazioni.

174. *Quando più frazioni hanno lo stesso denominatore, si addizionano, o si sottraggono, sommando o sottraendo i loro numeratori, e dando al risultato per denominatore il denominatore comune.*

È evidente, per esempio, che, addizionando due settimi, tre settimi e quattro settimi, si ottiene un numero di settimi eguale a $2+3+4$, cioè a dire 9 settimi, si ha dunque $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{9}{7}$.

La differenza tra $\frac{12}{13}$ e $\frac{4}{13}$ è evidentemente anche un numero di tredicesimi eguale a $12-4$, ossia 8, dunque $\frac{12}{13}-\frac{4}{13}=\frac{8}{13}$.

175. Qualunque siano le frazioni da sommare o da sottrarre, si ridurranno allo stesso denominatore, e si opererà poi secondo la regola precedente.

Siano, per esempio, le frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$: riducendole allo stesso denominatore, diventano $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; la loro somma è dunque $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}$ e la loro differenza $\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}$.

OSSERVAZIONE. Quando si debbano addizionare dei numeri misti, cioè composti di una parte intera e di una frazione, bisogna conviene effettuare l'addizione delle frazioni poi quella degli interi e riunire insieme le due somme ottenute.

ESEMPIO. Addizionare $9+\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$ e $42+\frac{17}{24}$. Riducendo le frazioni al loro minimo denominatore comune 120, si ha:

$$\begin{array}{rr} & 9\ \frac{100}{120} \\ + & \frac{56}{120} \\ + & 42\ \frac{85}{120} \\ \hline \text{Somma} & 51\ \frac{241}{120} \end{array} \quad \text{ossia} \quad 53\ \frac{1}{120}.$$

tutti i teoremi dimostrati per la somma
valgono per la somma e la sottra[illegible]

Parimente per fare la sottrazione di due numeri composti di una parte intera e di una frazione, si sottrae la frazione del diminutore (sottraendo) da quella del diminuendo; lo stesso si fa per la parte intera e si riuniscono le due differenze.

Esempio I. Sottrarre $42\frac{19}{36}$ da $58\frac{31}{45}$.

Il minimo denominatore comune delle due frazioni essendo 180 si ha

$$\begin{array}{rr} & 58\,\frac{124}{180} \\ - & 42\,\frac{95}{180} \\ \hline \text{differenza} & 16\,\frac{29}{180}. \end{array}$$

Esempio II. Sottrarre $36\frac{13}{15}$ da $61\frac{17}{21}$.

$$\begin{array}{rr} & 61\,\frac{85}{105} \\ - & 36\,\frac{91}{105} \\ \hline \text{differenza} & 24\,\frac{99}{105} \quad \text{ossia} \quad 24\,\frac{33}{35}. \end{array}$$

Siccome in quest' ultimo esempio la frazione diminutore è maggiore della frazione diminuendo, si aggiunge a questa un' unità, cioè $\frac{105}{105}$, e si ottiene così in tutto $\frac{190}{105}$, da cui si toglie $\frac{91}{105}$, e si ha per resto $\frac{99}{105}$. Perchè il resultato della sottrazione non cambi, essendosi aggiunta 1 unità alla parte frazionaria del diminuendo, si aggiunge pure un' unità alla parte intera 36 del diminutore, allora da 61 togliendo 37 restano 24.

Si potrebbe anche, tanto nel caso della addizione come in quello della sottrazione, per effettuare l' opera-

e la sottrazione di numeri inte

zione ridurre i numeri misti a frazioni improprie, effettuare l'operazione su queste e poi estrarre gl'interi dal resultato. Si avrebbe così, per esempio,

$$9\frac{5}{6}+\frac{7}{15}+42\frac{17}{24}=\frac{59}{6}+\frac{7}{15}+\frac{1025}{24}=$$
$$=\frac{1180+56+5125}{120}=\frac{6361}{120}=53\frac{1}{120}$$

$$58\frac{31}{45}-42\frac{19}{36}=\frac{2641}{45}-\frac{1531}{36}=$$
$$=\frac{10564-7655}{180}=\frac{2909}{180}=16\frac{29}{180}.$$

Moltiplicazione delle frazioni

176. Quando si prende una certa frazione di una grandezza, si dice che si moltiplica la grandezza per questa frazione. La grandezza moltiplicata si chiama *moltiplicando*, ed il resultato dell'operazione il suo *prodotto* per la frazione, che fa da *moltiplicatore*. Così, moltiplicare una grandezza per $\frac{2}{3}$, significa prenderne i due terzi. In Aritmetica la grandezza da moltiplicare è rappresentata da un numero, e si cerca il numero che esprime il prodotto.

Per moltiplicare due frazioni, bisogna dividere il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori. Debbasi moltiplicare $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{11}$, cioè a dire, debbansi prendere i $\frac{3}{11}$ di $\frac{2}{7}$: per quest' oggetto, si prenderà l'undecimo di $\frac{2}{7}$ e si ripeterà tre volte; ora l'undecimo di $\frac{2}{7}$ è (165) $\frac{2}{7\times 11}$, e il triplo di $\frac{2}{7\times 11}$ è (164) $\frac{2\times 3}{7\times 11}$; tale è dunque il valore del prodotto.

Questa regola può dimostrarsi ancora nel seguente modo. Moltiplicando la frazione $\frac{2}{7}$ per 3, il prodotto $\frac{2 \times 3}{7}$, che ne risulta, è 11 volte più grande del prodotto che si cerca, giacchè il moltiplicando 3 è 11 volte più grande di $\frac{3}{11}$: quindi, per ottenere il prodotto richiesto, bisogna dividere $\frac{2 \times 3}{7}$ per 11, ciò che dà $\frac{2 \times 3}{7 \times 11}$.

Osservazione I. I numeri interi essendo frazioni il cui denominatore è l'unità, la regola generale si applica al caso in cui il moltiplicando è intero.

Esempio.

$$7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$

Osservazione II*. La moltiplicazione delle frazioni unite agli interi non offre alcuna difficoltà, avvertendo di ridurre ad una sola frazione qualunque fattore composto di un intero e di una frazione. Ma questa moltiplicazione può effettuarsi ancora in un altro modo.

Debbasi moltiplicare $3 + \frac{5}{7}$ per $4 + \frac{3}{11}$. Si ha (47):

$$\left(3 + \frac{5}{7}\right) \times \left(4 + \frac{3}{11}\right) = 3 \times 4 + 3 \times \frac{3}{11} + \frac{5}{7} \times 4 + \frac{5}{7} \times \frac{3}{11}$$

$$= 12 + \frac{9}{11} + \frac{20}{7} + \frac{15}{77} = 12 + \frac{63 + 220 + 15}{77}$$

$$= 12 + \frac{298}{77} = 15 + \frac{67}{77}.$$

Osservazione III. Il prodotto di due frazioni non cambia invertendo i fattori, giacchè, per la regola precedente, ciò torna lo stesso che mutare l'ordine dei fattori, che formano il suo numeratore ed il suo denominatore.

Così, per esempio,

$$\frac{3}{11}\times\frac{2}{7}=\frac{3\times2}{11\times7},\ \text{e}\ \frac{2}{7}\times\frac{3}{11}=\frac{2\times3}{7\times11},$$

ma $3\times2=2\times3$, e $11\times7=7\times11$, dunque si ha

$$\frac{3}{11}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\times\frac{3}{11}$$

177. Il prodotto di più frazioni si definisce come quello di più numeri interi; è il risultato ottenuto, moltiplicando le due prime frazioni fra loro, poi il loro prodotto per la terza, poi il nuovo prodotto per la quarta, ecc. Un simile prodotto è, per la regola precedente, eguale al prodotto di tutti i numeratori diviso per quello di tutti i denominatori. Qualunque sia l' ordine dei fattori, il numeratore ed il denominatore del prodotto saranno sempre composti dei medesimi fattori interi; per conseguenza, *il prodotto di più frazioni non cambia invertendo i fattori.*

Procedendo in un modo affatto analogo a quello tenuto pei numeri interi (**41**, **43**), si potranno dal precedente teorema dedurre i seguenti:

Per moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori, si può moltiplicarlo successivamente per questi diversi fattori.

Per moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, basta formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e con quelli del moltiplicatore.

In un prodotto di più fattori si può sostituire ad un numero qualunque di fattori il loro prodotto effettuato.

Così per gli altri teoremi sui prodotti di più fattori.

Divisione delle frazioni

178. Dividere una grandezza per una frazione significa trovare una seconda grandezza, che moltiplicata per questa frazione riproduca la prima. La grandezza divisa si chiama *dividendo*, la frazione, per la quale si divide, dicesi *divisore*, ed il resultato dell'operazione si chiama *quoziente*. In Aritmetica la grandezza da dividere è rappresentata da un numero, e si cerca il numero che rappresenta il quoziente.

Per dividere una grandezza per una frazione, basta moltiplicarla per la frazione divisore rovesciata.

numero

Debbasi, per esempio, dividere per $\frac{4}{7}$ una grandezza, che chiamo A. Si tratta di trovare un numero il cui prodotto per $\frac{4}{7}$ sia eguale ad A; in guisa che i $\frac{4}{7}$ del quoziente equivalgono ad A; dunque $\frac{1}{7}$ del quoziente è il quarto di A, e per conseguenza sette settimi del quoziente o il quoziente intero è i sette quarti di A, o il prodotto di A per la frazione $\frac{7}{4}$, ciò che bisognava dimostrare.

Da ciò si deduce che *per dividere un numero intero o frazionario per una frazione basta moltiplicarlo per la frazione divisore rovesciata.*

Esempio. $\frac{5}{7}$ divisa per $\frac{3}{11}$ dà per quoziente $\frac{5}{7} \times \frac{11}{3} = \frac{55}{21}$.

Questa regola può dimostrarsi ancora nel seguente modo. Debbasi dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$. Dividendo $\frac{3}{5}$ per 4, il quoziente $\frac{3}{5 \times 4}$ è 7 volte più piccolo del quoziente che si cerca, perchè 4 è 7 volte più grande del divisore vero; quindi per ottenere il quoziente richiesto, basta moltiplicare $\frac{3}{5 \times 4}$ per 7, ciò che dà $\frac{3 \times 7}{5 \times 4}$.

Per dividere una frazione numero per una frazione

Si può anche trar profitto dal principio già dimostrato (68) che il quoziente non muta, moltiplicando il dividendo ed il divisore per uno stesso numero. Infatti, moltiplicando $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{7}$ per $\frac{7}{4}$, si ha $\frac{3 \times 7}{5 \times 4}$ e $\frac{4 \times 7}{7 \times 4}$ ossia 1; ora un numero qualunque diviso per l'unità dà per quoziente il numero stesso, dunque ec....

179. Osservazione. Le parole moltiplicazione e divisione applicate alle frazioni, sono evidentemente sviate dal loro significato etimologico, nel quale, moltiplicare, significa prendere un certo numero di volte, e dividere, fare un certo numero di parti. Per mostrare che, malgrado ciò, queste operazioni sono affatto analoghe a quelle che si riferiscono ai numeri interi, basterà esaminare il significato delle definizioni date (**176**, **178**) nel caso, in cui si tratti di un moltiplicatore o di un divisore intero, posto sotto forma di frazione, $\frac{6}{2}$ per esempio.

Moltiplicare una grandezza per $\frac{6}{2}$ (**176**), significa prenderne 6 volte la metà, cioè a dire il triplo.

Dividere una grandezza per $\frac{6}{2}$ (**178**), significa trovare una seconda grandezza di cui la prima sia i $\frac{6}{2}$, cioè a dire la tripla; questa seconda grandezza è evidentemente il terzo della prima.

La coincidenza delle due definizioni nei due casi è evidente.

Applicazione della teoria delle frazioni

180. 1° *Un palo verticale è diviso in quattro parti. La prima è $\frac{1}{8}$, la seconda $\frac{1}{4}$ e la terza i $\frac{2}{7}$ della sua al-*

$a : \frac{4}{\ } = a \times \frac{7}{\ }$ $a : \frac{4}{\ } = x$

tezza totale; la quarta è $\frac{5}{11}$ di metro. Qual' è l' altezza del palo?

Le tre prime parti riunite formano $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{7}$ o $\frac{73}{84}$ dell' altezza totale; quindi la quarta n' è gli $\frac{11}{84}$. Ma questa parte è $\frac{5}{11}$ di metro, quindi gli $\frac{11}{84}$ del palo equivalgono a $\frac{5}{11}$ di metro, cioè a dire che l' altezza del palo, moltiplicata per $\frac{11}{84}$ dà per prodotto $\frac{5}{11}$ di metro. Dunque quest' altezza è il quoziente della divisione di $\frac{5}{11}$ di metro per $\frac{11}{84}$, ed è espressa da

$$m.\ \frac{5}{11}\times\frac{84}{11}=m.\ 3+\frac{57}{121}$$

2° *Una palla elastica rimbalza ad un' altezza eguale ai $\frac{2}{9}$ di quella, dalla quale è caduta; dopo aver rimbalzato tre volte, si eleva ad un' altezza di $\frac{13}{16}$ di metro; da quale altezza è caduta la prima volta?*

Poichè la palla è rimbalzata tre volte, l' altezza alla quale si eleva è eguale a quella, da cui è caduta la prima volta, moltiplicata tre volte pel fattore $\frac{2}{9}$, cioè a dire per $\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{729}$. Gli $\frac{8}{729}$ dell' altezza che si cerca sono dunque $\frac{13}{16}$ di metro, e quest' altezza è per conseguenza uguale al quoziente della divisione di $m.\ \frac{13}{16}$ per $\frac{8}{729}$ o $\frac{13\times729}{16\times8}=\frac{9477}{128}=m.\ 74+\frac{5}{28}$.

3° *Una fontana riempie una vasca in $\frac{7}{5}$ di ora, un' altra la riempie in $\frac{7}{3}$ di ora. In quanto tempo la riempiranno tutte e due, versando contemporaneamente?*

Poichè la prima fontana riempie la vasca in $\frac{7}{5}$ di

ora, in $\frac{1}{5}$ di ora ne riempirà $\frac{1}{7}$; dunque in un'ora riempirà $\frac{5}{7}$ della vasca.

Un ragionamento analogo proverebbe che la seconda fontana può riempire in un'ora i $\frac{3}{7}$ della vasca.

Da ciò segue che le due fontane, versando contemporaneamente, in un'ora riempiono $\frac{8}{7}$ della vasca; dunque $\frac{1}{7}$ della vasca sarà riempita in $\frac{1}{8}$ di ora, e quindi tutta la vasca sarà riempita in $\frac{7}{8}$ di ora.

Le soluzioni precedenti richieggono, per esser bene intese, che si abbia un'idea chiara di ciò che significa moltiplicare o dividere una grandezza per una frazione, ma è questa la sola difficoltà che offrono.

Generalizzazione della teoria delle frazioni

181. Il quoziente della divisione di due numeri interi si può porre sotto forma di frazione, scrivendoli l'uno al disotto dell'altro e separandoli mediante una linea orizzontale. Questa notazione si applica sovente a numeri non interi; per esempio, per indicare il quoziente della divisione di $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, si scrive $\frac{\left(\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$, e si dà, per analogia, il nome di frazioni a simili espressioni.

È importante mostrare che tutte le regole relative al calcolo delle frazioni sono applicabili, senza eccezione, a queste *espressioni frazionarie*. E questo sarà da noi fatto nei seguenti teoremi, ove, per brevità, abbiamo indicati con le lettere a e b i numeratori e i denominatori frazionarî di queste espressioni.

Teorema VIII. *I due termini di una espressione della forma $\frac{a}{b}$ si possono moltiplicare per uno stesso numero intero o frazionario, senza alterare il valore dell' espressione.*

Sia m un numero qualunque; bisogna provare che

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}.$$

Indichiamo con q il valore del quoziente $\frac{a}{b}$. La quantità q sarà sempre eguale ad una frazione a termini interi, quantunque a e b sieno frazionarî, giacchè il quoziente della divisione di due frazioni è una frazione.

Per definizione si avrà:

$$a=q\times b.$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza pel numero m, si avrà:

$$a\times m=q\times b\times m=q\times(b\times m).$$

Questa nuova eguaglianza esprime che q è il quoziente della divisione di $a\times m$ per $b\times m$; si ha dunque.

$$q=\frac{a\times m}{b\times m};$$

ciò che bisognava dimostrare.

Osservazione. Dal teorema precedente segue che più espressioni della forma $\frac{a}{b}$ si possono ridurre allo stesso denominatore, in un modo affatto analogo a quello usato per le frazioni a termini interi. Quindi l' addizione e la sottrazione di quest' espressioni non offrono alcuna difficoltà, perchè si effettuano colle stesse

regole date per l'addizione e sottrazione delle frazioni semplici.

182. Teorema IX. *Il prodotto di due espressioni della forma* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *è uguale al prodotto dei numeratori diviso per quello dei denominatori.*

Chiamiamo q e q' le frazioni a termini interi che sono eguali ad $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$; si avrà

$$\frac{a}{b}=q,\ \frac{c}{d}=q';$$

e per definizione,

$$a=q\times b,\ c=q'\times d.$$

Il prodotto dei primi membri dev'essere eguale a quello dei secondi; si avrà dunque

$$a\times c=(q\times b)\times(q'\times d)=q\times q'\times(b\times d).$$

Quest'eguaglianza esprime che il prodotto $q\times q'$ è eguale al quoziente della divisione di $a\times c$ per $b\times d$, cioè a dire che

$$q\times q'=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Ciò che bisognava dimostrare.

183. Teorema VIII. *Per dividere una grandezza per un'espressione della forma* $\frac{a}{b}$, *basta moltiplicarla per l'espressione rovesciata* $\frac{b}{a}$.

Sia A una grandezza da dividere per $\frac{a}{b}$; bisogna

trovare una seconda grandezza Q, che, moltiplicata per $\frac{a}{b}$, riproduca A. Si deve dunque avere.

$$A = Q \times \frac{a}{b};$$

ovvero, moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per l'espressione $\frac{b}{a}$;

$$A \times \frac{b}{a} = Q \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = Q \times \left(\frac{a \times b}{b \times a}\right) = Q;$$

ciò che bisognava dimostrare.

Esercizi

I. La somma dei numeratori di più frazioni equivalenti, divisa per la somma dei loro denominatori, dà una frazione equivalente a ciascuna delle frazioni date.

II. La somma dei numeratori di più frazioni, divisa per quella dei loro denominatori, dà una frazione compresa fra la maggiore e la minore di queste frazioni.

III. Due frazioni irriducibili non possono avere per somma un numero intero, se non quando hanno lo stesso denominatore.

IV. La somma di tre frazioni irriducibili, non può essere un numero intero, se uno dei tre denominatori contiene un fattore primo che non divide nessuno degli altri due.

V. Sottraendo dall'unità una frazione irriducibile, il resto è pure una frazione irriducibile.

VI. Riducendo ad una frazione impropria un numero misto, del quale la parte frazionaria è irriducibile, il resultato è pure una frazione irriducibile.

VII. Estraendo gl'interi da una frazione impropria

irriducibile, la parte frazionaria del numero misto ottenuto è pure irriducibile.

VIII. Qual' è la condizione, perchè la somma, la differenza, il prodotto o il quoziente di due frazioni irriducibili sia pure una frazione irriducibile?

IX. Se si dispongono per ordine di grandezza tutte le frazioni irriducibili minori dell' unità, di cui il denominatore è inferiore ad un numero dato, le frazioni equidistanti dalle due estreme avranno lo stesso denominatore e la loro somma sarà l' unità.

X. Se si considerano le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \times 3}$, $\frac{1}{3 \times 4}$, $\frac{1}{4 \times 5}$, $\frac{1}{5 \times 6}$, $\frac{1}{6 \times 7}$ ecc. .... provare che la somma delle n prime è minore dell' unità e ne differisce di una quantità eguale a $\frac{1}{n+1}$.

XI. Se si considerano le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ecc., potremo prenderne un numero abbastanza grande, perchè la loro somma superi un numero qualunque tanto grande quanto si vuole.

XII. Verificare che, qualunque sia il numero intero n, si ha

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3 \times 5}+\frac{1}{5 \times 7}+\frac{1}{7 \times 9}+ \dots \frac{1}{(2n+1)\times(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

XIII. Se A e B sono due numeri interi qualunque, che si dividono l'uno per l'altro, P essendo il quoziente ed R il resto, si avrà:

$$\frac{B}{A}=P+\frac{R}{A}.$$

Facciamo ancora

$$\frac{B}{R}=P_1+\frac{R_1}{R},$$

$$\frac{B}{R_1}=P_2+\frac{R_2}{R_1}$$

e così di seguito, fino a che si trovi una divisione che riesca; provare che si ha

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{PP_1P_2}-\frac{1}{PP_1P_2P_3}+\text{ecc.}$$

XIV. Se $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}$, indicano frazioni, non irriducibili, dello stesso denominatore, e tali che b, c, d, abbiano per massimo comun divisore l'unità, per ottenere altre frazioni equivalenti a quelle e del medesimo denominatore, bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna di esse per uno stesso numero.

XV. Se s'indica, in generale, con Ea la parte intera di un numero a, avremo, qualunque sia il numero indicato con x,

$$Ex+E\left(x+\frac{1}{n}\right)+E\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots E\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=Enx,$$

n rappresentando un numero intero qualunque.

XVI. La popolazione dell'Asia è, secondo l'opinione di uno statista, $\frac{13}{7}$, di quella dell'Europa; la popolazione dell'Affrica ne è $\frac{3}{11}$ e quella dell'America $\frac{13}{77}$. Supponendo che la popolazione dell'America fosse in quel tempo di 390257000 abitanti, calcolare quella delle altre tre parti del mondo.

XVII. Il mare ricopre $\frac{11}{14}$ della superficie del globo terrestre. La superficie dell'Asia è $\frac{121}{27}$ di quella dell'Europa; quella dell'Affrica $\frac{22}{7}$, quella dell'America $\frac{111}{29}$ e quella dell'Oceania $\frac{31}{27}$. Supponendo che la superficie dell'Affrica sia di 2970000000 d'ettare, calcolare quella delle

altre parti del mondo e dedurne la superficie totale del globo.

XVIII. Il lastrico di una città occupa uno spazio di ettare, 311 $\frac{3}{7}$; supponendo un lastrico uniforme e tale che 12 pietre occupino $\frac{2}{3}$ di metro quadrato, quale sarebbe il numero delle pietre del lastrico ed il loro prezzo totale, supponendo che per 20 franchi se ne possano mettere 52?

XIX. Il consumo annuo è, per le strade maestre, di 225 decimetri cubi per chilometro e per mille chilogrammi di circolazione. Quale dev'essere la circolazione giornaliera media, affinchè s'impieghino annualmente 700 metri cubi di pietrame per il mantenimento di una strada, la cui lunghezza è $\frac{3}{4}$ di chilometro? Si ammetterà che il metro cubo di pietrame non contenga, a causa dei voti, che $\frac{6}{11}$ di metro cubo di pietra.

XX. Il metro cubo di carbone in pezzi non rappresenta che $\frac{6}{11}$ di metro cubo di carbone in roccia; il carbone in pezzi pesando 81 chilogrammi l'ettolitro (decimo di metro cubo), qual'è il volume di un pezzo di carbone che pesa chilog. 655 $\frac{3}{4}$.

XXI. Una strada ferrata ha consumato in un anno 42341050 chilogrammi di coke. Qual'era il volume occupato nella mina dal carbone, che ha prodotto questo coke, ammettendo che il peso del coke è i $\frac{2}{3}$ del peso del carbone che serve a fabbricarlo? (Si farà uso dei dati della questione precedente).

XXII. Un operaio farebbe un certo lavoro da se solo in 24 giorni; un altro operaio lo farebbe da solo in 12 giorni; ed un terzo operaio in 16 giorni. Quanto tempo impiegheranno ad eseguire quello stesso lavoro, se lavorano tutti e tre insieme?

XXIII. Una cannella, che getta acqua in una vasca l'empirebbe da se sola in ore $3\frac{1}{5}$; un'altra empirebbe la stessa vasca in ore $4\frac{2}{3}$. Supposta la vasca vuota, e lasciando aperte contemporaneamente le due cannelle, in quanto tempo si riempirà la vasca?

XXIV. In una vasca immettono acqua tre cannelle: la prima riempirebbe da se sola la vasca, quando fosse vuota, in 8 ore, la seconda in 12, e la terza in 18. Di due condotti di emissione praticati in fondo alla vasca, il primo la vuoterebbe, quando fosse piena e fossero chiuse le cannelle e l'altro condotto, in 20 ore ed il secondo in 24. Essendo la vasca vuota e lasciando aperte contemporaneamente cannelle e condotti, quanto tempo occorrerà perchè la vasca sia riempita?

XXV. Tre mulini insieme potrebbero macinare una certa quantità di grano in 24 ore; il primo da solo macinerebbe la stessa quantità di grano in 72 ore, ed il secondo in 120. In quanto tempo potrebbe il terzo mulino, lavorando da solo, macinare quel grano?

XXVI. Una compagnia di operai farebbe un certo lavoro in 24 giorni, un'altra farebbe lo stesso lavoro in 18 giorni, ed una terza lo farebbe in 30 giorni. Impiegando insieme per quel lavoro $\frac{1}{3}$ della prima compagnia, la metà della seconda e tutta la terza, in quanto tempo potrà esser finito il lavoro?

XXVII. Di 4 compagnie d'operai la prima scaverebbe un canale in 45 giorni, la seconda in 12, la terza in 24 e la quarta in 30. Impiegando contemporaneamente al lavoro $\frac{2}{5}$ della prima compagnia, $\frac{3}{4}$ della seconda, la metà della terza ed $\frac{1}{3}$ della quarta, in quanto tempo il lavoro stesso sarà condotto a termine?

XXVIII. Aumentando i $\frac{3}{4}$ di un numero dei $\frac{4}{5}$ di questo numero e togliendo al resultato $\frac{7}{10}$ del numero stesso, si ottengono 102 unità. Qual'è il numero incognito?

XXIX. Aggiungendo ad un numero i $\frac{2}{3}$ ed i $\frac{4}{7}$ di questo numero e togliendo al resultato ottenuto i $\frac{3}{5}$ ed i $\frac{7}{8}$ del numero stesso e 208 unità si ottengono 1074 unità. Si domanda il numero incognito.

XXX. Un negoziante, che possedeva una certa quantità di vino, ne ha venduto prima $\frac{1}{3}$ a L. 42 l'ettolitro; poi $\frac{3}{10}$ a L. 45 l'ettolitro; quindi $\frac{1}{4}$ a L. 41 l'ettolitro ed in ultimo ettolitri 7, che gli erano rimasti, a L. 43 l'ettolitro. Si vuol sapere qual'è il guadagno del negoziante, posto che quel vino fosse costato a lui L. 40 l'ettolitro indistintamente.

XXXI. Una persona, dopo avere speso $\frac{4}{7}$ di una somma che possedeva, riscuote 105 lire; così si trova a possedere la somma, che aveva prima della spesa, aumentata di $\frac{1}{2}$. Quanto possedeva quella persona?

XXXII. Un viaggiatore spende in quattro giorni di viaggio, il primo giorno $\frac{2}{5}$ della somma che possedeva, il secondo giorno $\frac{1}{3}$ di quanto gli era rimasto, il terzo giorno $\frac{3}{4}$ del nuovo resto, e l'ultimo giorno L. 36, che gli erano rimaste. Con qual somma si era messo in viaggio?

XXXIII. Dividere una somma di L. 360 fra due persone A e B, in modo che la parte di B sia $\frac{2}{3}$ di quella di A.

XXXIV. Dividere una somma di L. 8600 fra 4 persone A, B, C, D, in modo che la parte di B sia $\frac{2}{5}$ di quella A, quella di C $\frac{4}{3}$ di quella di B e quella di D eguale alla somma delle parti di B e C.

XXXV. Tre persone si sono divise le mele contenute in un paniere; la prima ne ha presi i $\frac{2}{5}$ più 6 mele, la seconda $\frac{1}{3}$ di quelle rimaste più 9 mele e la terza ha avuto

mele 31, che rimanevano. Quante mele erano nel paniere, e quante ne ha avute ciascuna persona?

XXXVI. Un tale compra un anello d'oro e dà in cambio un'orologio, che viene stimato $\frac{8}{5}$ del prezzo dell'ánello meno L. 30: così il compratore dell'anello riceve oltre questo L. 78. Si vuol sapere il prezzo dei due oggetti.

XXXVII. Un negoziante imprende una speculazione con una certa somma; nel primo anno perde i $\frac{3}{10}$ del capitale; nel secondo anno guadagna i $\frac{5}{7}$ di ciò che si trovava a possedere alla fine del primo anno; nel terzo guadagna $\frac{1}{6}$ di quel che possedeva alla fine del secondo; e cessa la speculazione con un guadagno di L. 3200. Qual'era il capitale impiegato da esso in principio?

XXXVIII. Di una pezza di tela sono stati venduti prima $\frac{1}{5}$, poi $\frac{2}{3}$ del resto e ne sono rimasti $\frac{2}{3}$ meno metri 18. Quanti metri era lunga la pezza e quanti ne sono stati venduti in ciascuna volta?

XXXIX. A dà a B, C, D un certo numero di palle, che possedeva; dà a B la metà delle palle più mezza palla; a C la metà del resto più mezza palla, e a D la metà del secondo resto più mezza palla. Così tutte le palle sono distribuite e nessuna spezzata. Quante erano?

XL. Un orologiaro compra un certo numero di orologi e spende in tutto L. 1923. Ha comprato $\frac{1}{3}$ degli orologi a L. 24 l'uno, $\frac{1}{4}$ a L. 40 l'uno ed i rimanenti a L. 85 l'uno. Quanti erano gli orologi?

XLI. Un negoziante ha comprato una pezza di panno a L. 20 il metro. Per guadagnare su tutta la pezza L. 165 ne vende la metà a L. 24 al metro, $\frac{1}{6}$ a L. 20, $\frac{1}{4}$ a L. 27 ed il resto a L. 30. Quanti metri era lunga la pezza?

XLII. Una contadina porta al mercato un certo numero di uova. Vende ad una persona la metà delle uova più mezz'uovo; ad un altra la metà delle uova vendute alla pri-

ma più mezz'uovo; ad una terza la metà dell'uova vendute alla seconda più mezz'uovo; e ad una quarta persona 2 uova, che le erano rimaste. Quante uova aveva portato al mercato?

XLIII. Si domanda ad una persona quanti anni ha, ed essa risponde: $\frac{3}{4}$ dell'età, che ho al presente, sono eguali ai $\frac{2}{3}$ di quella, che avrò fra tre anni. Qanti anni ha quella persona?

XLIV. $\frac{2}{3}$ dell'età di un padre più $\frac{5}{9}$ dell'età del figlio fanno 42 anni; e $\frac{3}{4}$ dell'età del padre più $\frac{1}{6}$ dell'età del figlio fanno 39 anni. Trovare l'età di ciascuno.

XLV. Una lepre è avanti ad un cane di 80 salti; mentre il cane fa 2 salti la lepre ne fa 3, e la lepre percorre in 5 salti lo stesso spazio che il cane in 2 salti. Quanti salti dovrà fare il cane per raggiungere la lepre?

XLVI. Se le due lancette delle ore e dei minuti sul quadrante di un orologio segnano mezzodì, a che ora le due lancette saranno di nuovo coincidenti?

XLVII. A possiede $\frac{5}{8}$ di quello che possiede B; $\frac{4}{5}$ della somma posseduta da B diminuiti dei $\frac{7}{10}$ della somma posseduta da A fanno 58 lire. Quanto ha ciascuna persona?

XLVIII. A e B si mettono a giuocare con una egual somma di denaro. A perde i $\frac{9}{16}$ di quel che aveva ed ha B, che ha perduto i $\frac{7}{20}$ del suo denaro, restano L. $4\frac{1}{4}$ più che ad A. Quanto possedeva in principio ciascun giuocatore?

XLIX. 10 buoi soli o 10 cavalli soli possono pascere tutta l'erba di un prato in 174 giorni; quanto tempo impiegherebbero a mangiare tutta l'erba dello stesso prato 4 buoi e 6 cavalli insieme?

CAPITOLO IX

TEORIA DELLE FRAZIONI DECIMALI

Definizioni

184. La semplicità dei calcoli relativi ai numeri interi risulta dalla legge di decrescimento, che seguono le unità rappresentate dalle loro differenti cifre. Ma nulla obbliga ad arrestarsi nell'applicazione di questa legge alla cifra delle unità semplici; e si possono mettere alla sua destra nuove cifre, delle quali la prima esprimerà *decimi*, la seconda *centesimi*, la terza *millesimi* ecc., in guisa che ciascuna unità sia dieci volte minore della precedente. I numeri scritti a questo modo si chiamano *numeri decimali* o *frazioni decimali;* e, nello scriverli, fa d'uopo aver cura di porre una virgola dopo la cifra delle unità semplici, per indicare ove cominciano quelle, che esprimono frazioni di unità.

Esempio 375,483 significa 375 unità, 4 decimi, 8 centesimi, e 3 millesimi; 0,47 significa 4 decimi, 7 centesimi (*a*).

Maniera di enunciare i numeri decimali e loro proprietà

185. In conseguenza dell'adottata legge di decrescimento, le unità espresse da una cifra di posto qua-

(*a*) Si chiamano più propriamente numeri decimali quelli, che hanno una parte intera ed una parte decimale, come nel primo degli esempî ora citati; frazioni decimali quelle, in cui la parte intera è zero, come nel secondo.

Dicesi frazione decimale una frazione che ha per denominatore un'unità ~~formata~~ seguita da zeri cioè 10 o una potenza di 10

lunque possono facilmente trasformarsi in unità degli ordini seguenti. Per esempio, nel numero 375,483, la cifra 4 esprime 4 decimi, 40 centesimi, 400 millesimi; la cifra 8 esprime 8 centesimi o 80 millesimi, e finalmente 3 esprime 3 millesimi. Questo numero si può dunque enunciare nel modo seguente: 375 unità, 483 millesimi. Le 375 unità rappresentando 375000 millesimi, si può anche leggere: 375483 millesimi.

Ordinariamente per enunciare un numero decimale si enuncia la sua parte intera, poi si convertono le tre prime cifre decimali in millesimi, le tre seguenti in milionesimi ecc.

Esempio. 1783, 213517823 si legge: 1783 unità, 213 millesimi, 517 milionesimi, 823 bilionesimi.

Quando il numero delle cifre decimali non è un multiplo di tre, si termina enunciando le unità decimali rappresentate dall'ultima cifra o dall'insieme delle due ultime cifre.

Esempio. 37,51421783 si legge: 37 unità, 514 millesimi, 217 milionesimi, 83 centomilionesimi.

186. Osservazione I. L'ordine delle unità espresse da una cifra dipendendo solamente dal posto, che essa occupa a partire dalla virgola, si possono scrivere degli zeri alla destra di un numero decimale senza alterarne il valore. Così potremo rendere divisibile per 3 il numero delle cifre decimali di un numero e decomporlo, in tutti i casi, in unità, millesimi, milionesimi ecc.

187. Osservazione II. Per rendere un numero decimale, dieci, cento, mille.... volte maggiore o minore, basta spostare la virgola di uno, due, tre.... posti verso la destra o verso la sinistra, giacchè ciascuna cifra esprimerà così un valore, dieci, cento, mille volte più grande o più piccolo. Se il numero delle cifre non permettesse questo trasporto della virgola, si rende-

rebbe possibile, scrivendo degli zeri alla destra delle cifre decimali o alla sinistra della parte intera.

Esempio. Debbasi dividere 75,342 per 1000000. Trasportiamo la virgola di sei posti verso la sinistra, dopo averlo scritto nel modo seguente:

$$0000075{,}342;$$

si otterrà così

$$0{,}000075342.$$

Per moltiplicare lo stesso numero per 1000000, si avanzerà la virgola di sei posti verso la destra, dopo averlo scritto nel modo seguente:

$$75{,}342000;$$

si otterrà così

$$75342000.$$

188. Teorema. *Un' unità decimale di un certo ordine è sempre maggiore della somma dei numeri espressi dalle cifre che la seguono.*

Se, per esempio, si scrive

$$0{,}3478\ldots\ldots$$

qualunque sia il numero delle cifre che seguono 8, il loro insieme non esprimerà un decimillesimo. Ed invero supponiamo, per avere la maggior somma possibile, che tutte queste cifre siano 9. La prima esprimerà 9 centomillesimi, cioè a dire solamente i $\frac{9}{10}$ di un decimillesimo, e, per conseguenza, questa cifra differirà da un decimillesimo per un decimo di decimillesimo, cioè per un centomillesimo; la seconda esprimerà 9 milionesimi, cioè i $\frac{9}{10}$ solamente di un centomillesimo; per conseguenza, questa cifra, unita alla precedente, differirà da un

decimillesimo per un decimo di centomillesimo, ovvero per un milionesimo. Al modo stesso si vedrà che la cifra seguente rappresenta $\frac{9}{10}$ di milionesimo, e, in generale, ciascuna cifra non esprime che i nove decimi di ciò che bisognerebbe per completare un decimillesimo, cosicchè questa somma non sarà mai completata.

L'osservazione precedente è importante: da essa si deduce che un numero non può esprimersi in due modi differenti in frazioni decimali. Se, infatti, due cifre decimali sono differenti, la loro differenza esprimerà almeno un'unità decimale dell'ordine corrispondente, e non potrà essere compensata da una differenza in senso inverso tra le cifre seguenti.

Trasformazione di un numero decimale in frazione ordinaria

189. Abbiasi, per esempio, il numero decimale 75,32178, la cui ultima cifra esprime centomillesimi; si è veduto (**185**) che questo numero si può leggere: 7532178 centomillesimi; esso è dunque eguale a

$$\frac{7532178}{100000}.$$

In generale, *per trasformare un numero decimale in frazione ordinaria, bisogna sopprimere la virgola e dare per denominatore al risultato l'unità seguita da tanti zeri, quante cifre decimali contiene il numero proposto.*

Esempio. 7,454 è uguale a $\frac{7454}{1000}$.

Reciprocamente, *per scrivere sotto forma di numero decimale una frazione, che ha per denominatore l'unità seguìta da un certo numero di zeri, basta scrivere il numeratore e separare alla sua destra con una virgola tante cifre decimali, quanti zeri vi sono nel denominatore.* Se il numeratore non avesse un numero di cifre sufficiente per far questo, si scriverebbero alla sua sinistra più zeri, i quali, senza cambiarne il valore, renderebbero possibile l'operazione.

Esempio. $\frac{7}{1000}$ è uguale a 0,007.

Da ciò che precede risulta che una frazione decimale può definirsi; una frazione, che ha per denominatore una potenza di 10.

Addizione e sottrazione dei numeri decimali

190. Per effettuare l'addizione o la sottrazione di due numeri decimali, si procura di fare in modo che abbiano egual numero di cifre dopo la virgola, scrivendo, se è necessario, uno o più zeri alla destra di uno di essi. Poi si pongono l'uno al disotto dell'altro, in modo che le virgole si corrispondano sulla stessa colonna. Ciò fatto, si opera come se i numeri fossero interi, senza che vi sia alcuna differenza, sia per la pratica, sia per la teoria dell'operazione, avvertendo solamente di porre nel risultato una virgola nel posto indicato dalle virgole dei numeri dati. Si può solamente osservare che, nell'addizione, gli zeri posti alla destra di uno dei numeri decimali non influiscono sui risultati, e si può quindi fare a meno di scriverli; questi zeri sono egualmente inutili nella sottrazione, ogniqualvolta bisogna scriverli accanto al diminutore; anzi, nella

pratica, si fa a meno di scriverli anche alla destra del diminuendo e si sottintendono mentalmente nel fare l'operazione.

Esempio I. Siano da sommare i tre numeri

$$2{,}783, \qquad 5{,}42, \qquad 0{,}7842.$$

L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} 2{,}783 \\ 5{,}42 \\ 0{,}7842 \\ \hline 8{,}9872 \end{array}$$

Per rendere l'operazione identica a quella de' numeri interi, bisognerebbe scrivere uno zero alla destra del primo di questi numeri e due alla destra del secondo, perchè avessero tutti e tre quattro cifre dopo la virgola. Ma, questi zeri non avendo evidentemente alcuna influenza sull'andamento dell'operazione, si può fare a meno di scriverli e addizionare immediatamente le cifre, che rappresentano unità dello stesso ordine. Non vi ha che una cifra rappresentante decimillesimi, che è 2; la scriveremo dunque subito come cifra dei decimillesimi della somma. Vi son due cifre di millesimi 3 e 4, la cui somma 7 è la cifra dei millesimi della somma. Poichè le cifre dei centesimi 8, 2 e 8 danno per somma 18, scriveremo 8 come cifra dei centesimi della somma e si porteranno 10 centesimi ossia 1 decimo. Poichè le cifre dei decimi 7, 4 e 7 danno, unite al decimo riportato, per somma 19 decimi, si scrive 9 come cifra dei decimi della somma e si portano 10 decimi ossia 1 unità: si continua poi l'operazione al solito modo sulle parti intere.

La somma cercata è 8,9872.

Esempio II. Debbasi sottrarre 12,738 da 15,3. L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 15,300 \\ 12,738 \\ \hline 2,562 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{r} 15,3 \\ 12,738 \\ \hline 2,562 \end{array}$$

Operando al solito come sui numeri interi, otterremo per differenza 2,562.

Complemento aritmetico

191. Si chiama *complemento aritmetico di un numero* il resto della sottrazione di questo numero dall'unità seguìta da uno o più zeri; si dice *complemento al* 10 quando il numero dato si sottrae da 10; *complemento al* 100 quando si sottrae da 100, ecc. Così, per esempio, il complemento al 100 di 42,735 è 57,265, il complemento al 1000 è 957,265, ec. L'uso del complemento aritmetico riduce qualunque sottrazione ad un'addizione ed adduce molta brevità nelle operazioni ove si cerca il resultato di più addizioni e sottrazioni successive. Debbasi, infatti, sottrarre 42,735 da 78,651. Si ha:

$$78,651 - 42,735 = 78,651 + (100 - 42,735) - 100$$
$$= 78,651 + 57,265 - 100 = 135,916 - 100 = 35,916.$$

Dunque possiamo dire che *per sottrarre due numeri l'uno dall'altro basta aggiungere al diminuendo il complemento aritmetico del diminutore, purchè si sottragga dal resultato la potenza di 10, alla quale si è preso il complemento.*

Se ora si dovesse calcolare l'espressione,

$$35,423 - 112,592 + 59,21 - 2,38 + 89,3 - 24,7,$$

bisognerebbe, procedendo nel modo ordinario, eseguire due addizioni e tre sottrazioni; ma, facendo uso del complemento aritmetico, l'operazione si riduce ad una sola addizione. Infatti, per ciò che abbiamo detto innanzi, si potrà eseguire l'addizione di sei numeri, cioè di 35,423, di 59,21, di 89,3, del complemento di 112,592, del complemento di 2,38 e del complemento di 24,7, presi tutti e tre al 1000, purchè dal risultato si tolgano 3 migliaia. L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 35,423 \\ 887,408 \\ 59,21 \\ 997,62 \\ 89,3 \\ 975,3 \\ \hline 3044,261. \end{array}$$

Il risultato è dunque 44,261.

Moltiplicazione dei numeri decimali

192. *Per moltiplicare due numeri decimali l'uno per l'altro si effettua il prodotto, astrazion fatta dalle virgole, e si separano alla destra del risultato tante cifre decimali, quante ne contengono insieme i due numeri.*

I due numeri decimali si possono infatti considerare come due frazioni, aventi per denominatore delle potenze di dieci (**189**); e quindi si può applicare loro la regola di moltiplicazione delle frazioni. Il prodotto dei numeratori è il prodotto dei numeri interi ottenuti, sopprimendo le virgole. Per dividerlo pel prodotto dei denominatori basta (**187**) separare alla sua destra tante cifre, quanti zeri sono nei due denominatori, cioè

a dire tanti, quante cifre decimali contengono il moltiplicando ed il moltiplicatore insieme, ciò che dimostra la verità della regola enunciata.

Esempio. Per moltiplicare 37,245 per 0,05, si moltiplicherà 37245 per 5 e si separeranno cinque cifre decimali alla destra del resultato; otterremo così 1186225. Infatti

$$37{,}245 \times 0{,}05 = \frac{37245}{1000} \times \frac{5}{10} = \frac{37245 \times 5}{1000 \times 10} = \frac{186225}{10000} =$$
$$= 1{,}86225.$$

Avvertiamo che si potrebbe collo stesso metodo dimostrare la verità delle regole date per tutte le operazioni sui numeri decimali; basterebbe per ciò mettere i numeri decimali sotto forma di frazione ordinaria, effettuare le operazioni sui numeri così ottenuti colle regole date per le frazioni ordinarie, e ridurre il resultato sotto forma di frazione decimale.

Divisione dei numeri decimali

193. Nella divisione dei numeri decimali distinguеremo due casi.

1° *Il divisore è intero.* La divisione si effettua precisamente come quella dei numeri interi.

Debbasi dividere 78,314 per 57. Il dividendo è composto di 78314 *millesimi;* dunque bisogna dividere il numero intero 78314 per 57 ed il resultato rappresenterà millesimi. Effettuando questa divisione si trova 1373 per quoziente e 53 per resto; quindi il quoziente esatto della divisione di 78314 per 57 è eguale (**161**) a $1373 + \frac{53}{57}$ e, per conseguenza, il quoziente della divi-

sione proposta è 1373 millesimi più $\frac{53}{57}$ di millesimo, cioè a dire $1,373 + \frac{53}{57000}$.

In generale, *per dividere un numero decimale per un numero intero si effettua la divisione come se il dividendo fosse intero, e si separano alla destra del quoziente tante cifre decimali quante ne contiene il dividendo. Per avere il quoziente esatto, bisogna aggiungere al numero decimale, così ottenuto, una frazione, avente per numeratore il resto della divisione, che si è effettuata, e per denominatore il divisore seguito da tanti zeri, quante cifre decimali contiene il dividendo.*

La frazione che, secondo la regola precedente, completa il quoziente, potrà essere convertita in decimali mediante il metodo generale che sarà esposto più avanti.

194. 2° *Il divisore è una frazione decimale.* Si moltiplicheranno il dividendo e il divisore per una tal potenza di 10 che il divisore divenga intero. Questa moltiplicazione non altera il valore del quoziente e riduce questo caso al precedente.

Esempio. Debbasi dividere 2,2357 per 0,059; moltiplicando il dividendo e il divisore per 1000, questi numeri diventano 2235,7 e 59, che bisognerà dividere l'uno per l'altro. Effettuata questa divisione, secondo la regola precedente, si trova per quoziente esatto $37,8 + \frac{55}{590}$.

Osservazione. In ciò che precede si è parlato solamente del *calcolo esatto* dei numeri decimali. Nei calcoli pratici spesso si ritiene inutile ottenere per resultato un numero rigorosamente esatto; basta, d'ordinario, ottenere il numero approssimato a meno di un'unità di un ordine dato.

Più spesso ancora un resultato rigorosamente esatto è non solo inutile, ma del tutto impossibile ad ottenersi per mancanza di sufficiente esattezza nei dati; allora si fa uso di metodi più spediti per abbreviare il calcolo dei numeri decimali, sopprimendo le cifre, che sarebbero o superflue o inesatte, come vedremo in appresso.

RIDUZIONE DELLE FRAZIONI ORDINARIE IN DECIMALI

Condizione di possibilità perchè la trasformazione possa effettuarsi

195. E possibile in alcuni casi, data una frazione ordinaria, trovare una frazione decimale ad essa equivalente; perchè però ciò possa avvenire, deve verificarsi la condizione espressa nel seguente

Teorema. *Affinchè una frazione ordinaria irriducibile possa esprimersi esattamente sotto forma di frazione decimale, è necessario e sufficiente che il suo denominatore non contenga altri fattori primi che 2 e 5.*

1° Questa condizione è necessaria. Infatti indichiamo con $\frac{a}{b}$ una frazione irriducibile, che supponiamo potersi convertire esattamente in frazione decimale. In questa ipotesi, $\frac{a}{b}$ dovrà essere eguale ad una frazione decimale, la quale sappiamo (**189**) potersi sempre mettere sotto forma di una frazione ordinaria, che ha per denominatore una potenza di 10. Quindi potremo porre, indicando con N un numero qualunque,

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^m}.$$

Moltiplicando le due frazioni eguali per 10^m, si ha

$$\frac{a \times 10^m}{b} = N.$$

Allora, essendo N con numero intero, da questa eguaglianza risulta che $\frac{a \times 10^m}{b}$ deve pure ridursi ad un numero intero; ora perchè ciò possa avvenire è necessario che b divida il prodotto $a \times 10^m$; ma b è primo con a, dunque (**129**) deve dividere l'altro fattore 10^m; ma 10^m ha per fattori primi 2 e 5 solamente, per conseguenza (**143**) b deve contenere questi soli fattori primi e non altri.

2° **Questa condizione è sufficiente.** Sia $\frac{a}{b}$ una frazione irriducibile, il cui denominatore b non contenga altri fattori primi che 2 e 5. Potremo fare $b = 2^n \times 5^m$, n ed m essendo due esponenti qualunque, i quali possono essere eguali o disuguali. Se sono eguali, la proposizione non ha bisogno di dimostrazione, perchè allora $\frac{a}{b}$ è una frazione, che ha per denominatore una potenza di 10; se sono disuguali, potremo supporre uno maggiore dell'altro, per esempio, m maggiore di n. Ciò posto, supponiamo che si abbia $m = n + r$, essendo r la differenza fra m ed n. Moltiplicando i due termini della frazione data $\frac{a}{2^n \times 5^m}$ per 2^r; avremo

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n \times 5^m} = \frac{a \times 2^r}{2^n \times 5^m \times 2^r} = \frac{a \times 2^r}{2^{n+r} \times 5^m} =$$

$$= \frac{a \times 2^r}{2^m \times 5^m} = \frac{a \times 2^r}{10^m}$$

Questa eguaglianza dimostra ciò che volevamo, perchè la frazione ottenuta $\frac{a \times 2^r}{10^m}$, avendo per denominatore una potenza di 10, è una frazione decimale.

ESEMPIO. $\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \times 5}$: moltiplicando i due termini di questa frazione per 5^2 o 25, essa diventa $\frac{75}{2^3 \times 5^3} = \frac{75}{10^3} = 0{,}075$.

$\frac{4}{125} = \frac{4}{5^3}$. Moltiplicando i due termini di questa frazione per 2^3 o 8, essa diventa $\frac{32}{5^3 \times 2^3} = \frac{32}{10^3} =$ 0,032.

196. OSSERVAZIONE I. *Quando una frazione ordinaria irriducibile può trasformarsi in un numero decimale, questo numero ha tante cifre decimali, quante unità vi sono nell' esponente di quello dei fattori* 2 *e* 5, *che figura nel denominatore della frazione col maggiore esponente.*

OSSERVAZIONE II. Qualunque frazione potendo rendersi irriducibile, il teorema precedente permette sempre di decidere, se una data frazione è eguale a un numero decimale. Ordinariamente questa trasformazione è impossibile; ma si può sempre valutare la frazione data in decimali con quell' approssimazione che si vuole; ed è per l' appunto in questa valutazione approssimata che consiste generalmente la *riduzione di una frazione ordinaria in decimali.* E per quest' oggetto è indispensabile entrare in talune considerazioni, che ci torneranno utili anche in seguito

Valutazione approssimata delle grandezze e dei numeri

197*. Valutare una grandezza a meno di una grandezza data significa trovare il massimo multiplo della seconda, che è contenuto nella prima. Per esempio: valutare una distanza a meno di una lega significa trovare il maggior numero di leghe, che essa contiene. In Aritmetica non dobbiamo occuparci che dei numeri, pei quali del resto le definizioni sono affatto simili. Valutare un numero A a meno di un numero B significa trovare il massimo multiplo di B, che è contenuto in A. Così valutare un numero a meno di un'unità significa trovare il maggior numero di unità contenuto in questo numero. E in generale valutare un numero a meno di $\frac{1}{n}$ significa cercare il maggior numero di volte che questo numero contiene la n^{esima} parte dell'unità.

Quando si valuta un numero a meno di un altro numero dato, si ottengono in generale due limiti, uno approssimato per *difetto*, l'altro per *eccesso*, cioè uno minore, o uguale l'altro maggiore del numero proposto. Per esempio, se sappiamo che un peso è compreso fra 22 chilogrammi e 23 chilogrammi, tutti e due questi numeri saranno la misura del peso dato a meno di un'unità, il primo per difetto, il secondo per eccesso. Ed in generale, se sappiamo che un peso è maggiore di m volte la n^{esima} parte di un chilogrammo e minore di $m+1$ volte questa n^{esima} parte, le frazioni $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$ esprimono la misura del peso dato a meno di $\frac{1}{n}$, la prima per difetto, la seconda per eccesso.

198*. *Per valutare una frazione a meno di un'unità basta prendere l'intero contenuto in questa frazione, o l'intero immediatamente superiore.*

Abbiasi la frazione $\frac{478}{235}$. Effettuando la divisione del numeratore pel denominatore, si trova

$$\frac{478}{235} = 2 + \frac{8}{235}.$$

La frazione $\frac{478}{235}$ è quindi compresa fra 2 e 3; dunque i numeri 2 e 3 sono i valori di $\frac{478}{235}$ a meno di un'unità, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

199. *Per valutare una frazione a meno di* $\frac{1}{n}$ *basta valutare a meno di un'unità il prodotto di questa frazione per* n, *e dividere poi per* n *uno dei due interi consecutivi ottenuti.*

Osserviamo in generale che l'errore, che si commette valutando un numero A a meno di un numero B, è l'eccesso di A sul maggior multiplo di B, che è contenuto in A, o, ciò ch'è lo stesso, è il resto della divisione di A per B. Dunque il valore approssimato è il prodotto di B per la parte intera del quoziente.

Ciò posto, per ottenere il valore della frazione $\frac{a}{b}$ a meno di $\frac{1}{n}$, bisognerà dividere $\frac{a}{b}$ per $\frac{1}{n}$ e trovare la parte intera del quoziente; ma il quoziente della divisione di $\frac{a}{b}$ per $\frac{1}{n}$ è $\frac{a \times n}{b}$, dunque bisognerà trovare

l'intero contenuto nella frazione $\frac{a \times n}{b}$. Così, per esempio, volendo valutare $\frac{175}{249}$ a meno di $\frac{1}{12}$, si dividerà la prima frazione per la seconda e si otterrà per quoziente $\frac{175 \times 12}{249} = \frac{2100}{249} = 8 + \frac{108}{249}$; dunque il valore di $\frac{175}{249}$ approssimato a meno di $\frac{1}{12}$ è $\frac{8}{12}$, e l'errore, che si commette in questa valutazione. è $\frac{108}{249}$ di dodicesimo.

L'importanza del soggetto ci spinge a dare un'altra dimostrazione di questo teorema.

Poichè valutare $\frac{a}{b}$ a meno di $\frac{1}{n}$ vuol dire trovare il maggior numero di n^{esimi} contenuto in $\frac{a}{b}$, indicando con x questo numero di n^{esimi} contenuto in $\frac{a}{b}$, la frazione $\frac{a}{b}$ sarà compresa fra $\frac{x}{n}$ e $\frac{x+1}{n}$ ed avremo

$$\frac{x}{n} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{n};$$

si tratta di determinare il numero x. Ora le relazioni di grandezza, che passano fra le frazioni $\frac{x}{n}$, $\frac{a}{b}$ e $\frac{x+1}{n}$, non verranno alterate moltiplicandole tutte e tre per n; avremo dunque

$$x < \frac{a \times n}{b} < x + 1;$$

quindi la frazione $\frac{a \times n}{b}$ è compresa fra i due interi consecutivi x ed $x+1$. Per conseguenza otterremo il numero ignoto x, prendendo l'intero contenuto nella frazione $\frac{a \times n}{b}$.

Se la frazione $\frac{a}{b}$ può essere rappresentata esattamente con una frazione avente n per denominatore, potremo scrivere $\frac{a}{b} = \frac{x}{n}$, da cui, moltiplicando per n,

$$x = \frac{a \times n}{b}.$$

Dunque la frazione $\frac{a \times n}{b}$ si riduce a un numero intero, che è il valore di x.

Se la frazione $\frac{a}{b}$ è irriducibile, ciò che può sempre supporsi, il caso che si considera non può aver luogo, che se n è un multiplo di b (**129**).

Metodo per la riduzione delle frazioni ordinarie in decimali

200*. Applicando la regola data nel numero precedente, si vede che: *per valutare una frazione a meno di* $\frac{1}{10^n}$ *bisogna moltiplicare il suo numeratore per* 10^n, *ciò che si effettua scrivendo* n *zeri alla sua destra; poi cercare il quoziente intero della divisione del prodotto per il denominatore: e finalmente dividere questo quoziente per* 10^n, *ciò che può effettuarsi separando con una virgola* n *cifre alla sua destra.*

Abbiasi, per esempio, la frazione $\frac{116}{495}$, che si voglia valutare a meno di $\frac{1}{10^6}=0,000001$. Secondo la regola bisognerebbe scrivere sei zeri alla destra del numeratore e dividere il resultato per il denominatore, ma è chiaro che sarà lo stesso scrivere gli zeri, a misura che fanno bisogno, nei dividendi parziali rispettivi.

$$
\begin{array}{l|l}
1160 & 495 \\ \cline{2-2}
\;\;1700 & 0,234343 \\
\;\;\;\;2150 & \\
\;\;\;\;\;\;1700 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;2150 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1700 &
\end{array}
$$

Dunque 0,234343 è il valore di $\frac{116}{495}$ a meno di un milionesimo *per difetto*; 0,234344 sarebbe il valore approssimato a meno di un milionesimo *per eccesso*.

Osserviamo che il valore della frazione data a meno di un decimo è 0,2 con l'errore di $\frac{170}{495}$ di decimo; il valore a meno di un centesimo è 0,23 con l'errore di $\frac{215}{495}$ di centesimo; il valore a meno di un millesimo è 0,234 con l'errore di $\frac{170}{495}$ di millesimo ecc. Siccome la frazione data non è esprimibile esattamente in decimali (195), l'operazione precedente si può continuare indefinitamente, e l'errore si può rendere piccolo quanto si vuole, senza che però si possa mai annullare. Ciò si esprime dicendo che $\frac{116}{495}$ è il *limite*, verso il

quale tende l' espressione 0,234343.... quando vi si considera un numero di cifre di più in più grande.

Questo metodo è evidentemente generale, e si può enunciare la regola seguente:

Per ridurre una frazione in decimali, si divide il numeratore per il denominatore e si pone una virgola alla destra del quoziente, il quale dovrà essere sostituito con uno zero, se il numeratore è minore del denominatore. Si scrive uno zero alla destra del resto ottenuto, e si divide il resultato per il denominatore; il quoziente è la prima cifra decimale cercata. Si scrive uno zero alla destra del nuovo resto, e si divide il resultato pel denominatore; il quoziente è la seconda cifra decimale. Si continua così indefinitamente. Se una delle divisioni si fa esattamente, la frazione proposta può esprimersi sotto forma di numero decimale, altrimenti il metodo dà solamente valori della frazione data di più in più approssimati, e ci si arresta quando si ottenga al quoziente la cifra, che esprime unità decimale dell' ordine sul quale si vuole l' approssimazione.

OSSERVAZIONE. Resulta da quanto abbiamo detto che *ridurre una frazione ordinaria in decimali*, quando la riduzione non è possibile esattamente (**195**), significa valutarla a meno di un decimo, di un centesimo, di un millesimo...., formando la serie di questi valori di più in più approssimati.

Frazioni decimali periodiche

201. Si chiama *frazione decimale periodica* una frazione decimale illimitata, le cui cifre si riproducono sempre le stesse e nel medesimo ordine. L' insieme delle cifre che si riproducono si chiama un *periodo*. La frazione è detta *periodica semplice*, quando il pe-

riodo comincia immediatamente dopo la virgola; è detta *periodica mista*, nel caso contrario; e allora le cifre, che precedono il primo periodo, costituiscono *la parte non periodica o antiperiodo.*

ESEMPIO. 0,345 345 345 345....,

è una frazione decimale periodica semplice il cui periodo è 345; si può scrivere anche 0,(345);

0,74 318 318 318....

è una frazione periodica mista il cui periodo è 318; la parte non periodica è 74: si può scrivere 74,(318).

202. TEOREMA. *Qualunque frazione ordinaria ridotta in decimali dà luogo ad una frazione di un numero limitato di cifre, ossia finita, o ad una frazione periodica.*

Abbiasi una frazione ordinaria $\frac{A}{B}$. Operando su questa frazione in conformità della regola generale data per la riduzione delle frazioni ordinarie in decimali, si procederà nel modo seguente:

$$
\begin{array}{l|l}
A & B \\
\cline{2-2}
R \times 10 & Q, Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ Q_6 \ldots \\
R_1 \times 10 & \\
R_2 \times 10 & \\
R_3 \times 10 & \\
R_4 \times 10 & \\
R_5 \times 10 &
\end{array}
$$

Si divide A per B; sia Q il quoziente, ossia la parte intera della frazione decimale. Si moltiplica il resto R per 10 ed il prodotto $R \times 10$, diviso per B, dà la cifra Q_1 dei decimi. Si moltiplica poi per 10 il resto R_1 di

questa seconda divisione, e si divide $R_1 \times 10$ per B; si ha così un quoziente Q_2, cifra dei centesimi, ed un resto R_2. Così si continua l'operazione.

Se, procedendo in questo modo, uno dei resti R_1, R_2, R_3.... è nullo, $\frac{A}{B}$ è esattamente riducibile in decimali, altrimenti l'operazione continua indefinitamente. In questo caso, i resti R_1, R_2, R_3, ... essendo tutti minori di B, dopo un numero di divisioni eguale *al più* a $B-1$ si ricadrà sopra un resto già ottenuto, giacchè vi sono solamente $B-1$ numeri interi differenti, inferiori a B. La regolarità del processo, che dà le diverse cifre, mostra che, a partire da questi resti eguali, i quozienti ed i resti successivi saranno i medesimi e si presenteranno nello stesso ordine; la frazione decimale sarà dunque periodica. Se, per esempio, si avesse $R_1 = R_3$, se ne dedurrebbe $Q_2 = Q_4$, $R_2 = R_4$, $Q_3 = Q_5$ $R_3 = R_5$, ecc., e, per conseguenza, la frazione prolungata all'infinito sarebbe;

$$Q,\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_2\ Q_3\ Q_2\ Q_3 \ldots$$

Osservazione I. *Quando una frazione $\frac{A}{B}$ ridotta in decimali dà luogo ad una frazione periodica, il numero delle cifre del periodo è minore del denominatore B.*

Giacchè, i resti essendo tutti minori di B, dopo aver calcolate B cifre, saremo ricaduti due volte sullo stesso resto, e per conseguenza il periodo sarà cominciato.

Quando avviene che la frazione data si trasformi in frazione periodica mista, per la stessa ragione, si ha che *il numero delle cifre del periodo, aumentato del numero delle cifre della parte non periodica, dà*

una somma minore del denominatore della frazione ordinaria data.

203. Osservazione II. Allorchè il denominatore di una frazione è alquanto grande ed il numeratore è l'unità, le operazioni si possono abbreviare mediante un processo, di cui ci limiteremo a dare un esempio.

Sia da ridursi in decimali $\frac{1}{29}$: cominciando l'operazione secondo il metodo generale, si trova

$$\begin{array}{l|l} 1 & 29 \\ \hline 100 & 0{,}03448 \\ \;\;130 & \\ \;\;\;\;140 & \\ \;\;\;\;\;\;240 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;8 & \end{array}$$

E, per conseguenza,

[1] $\frac{1}{29} = 0{,}03448 + \frac{8}{29}$ di centomillesimi.

Moltiplicando i due termini di questa eguaglianza per 8, i prodotti saranno eguali, e si avrà:

[2] $\frac{8}{29} = 0{,}27584 + \frac{64}{29}$ di centomillesimi;

e, osservando che $\frac{64}{29} = 2 + \frac{6}{29}$,

[3] $\frac{8}{29} = 0{,}27586 + \frac{6}{29}$ di centomillesimi;

dividendo i due membri di questa eguaglianza per 100000, si ha

$$[4] \qquad \frac{8}{29} \text{ di centomillesimi} = 0{,}0000027586 + \frac{6}{29} \text{ di diecibilionesimi.}$$

Quindi il valore [1] di $\frac{1}{29}$ diventa

$$[5] \quad \frac{1}{29} = 0{,}0344827586 + \frac{6}{29} \text{ di diecibilionesimi.}$$

Moltiplicando al modo stesso i due membri di questa eguaglianza per 6,

$$[6] \quad \frac{6}{29} = 0{,}2068965516 + \frac{36}{29} \text{ di diecibilionesimi.}$$

Osservando che $\frac{36}{29} = 1 + \frac{7}{29}$, e dividendo i due membri dell' eguaglianza per 10 bilioni, si ha

$$\frac{6}{29} \text{ di diecibilionesimi}$$
$$= 0{,}00000000002068965517 + \frac{7}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{20}},$$

e per conseguenza il valore di $\frac{1}{29}$ [5] diventa

$$[7] \quad \frac{1}{29} = 0{,}03448275862068965517 + \frac{7}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{20}}.$$

Moltiplicando per 7 i due membri di questa eguaglianza, si trova

$$\frac{7}{29} = 0{,}24137931034482758619 + \frac{49}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{20}},$$

ovvero, osservando che

$$\frac{49}{29} = 1 + \frac{20}{29},$$

e dividendo per 10^{20} i due membri dell'eguaglianza, si ha

$$\frac{7}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{20}} = 0{,}0000000000000000000024137931034482758620 + \frac{20}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{40}};$$

che sostituito nel valore (7) di $\frac{1}{29}$ dà

$$\frac{1}{29} = 0{,}0344827586206896551724137931034482758620 + \frac{20}{29} \text{ di } \frac{1}{10^{40}},$$

e, poichè si hanno più di 28 cifre ed il denominatore della frazione proposta è 29, siamo certi che il periodo deve esser completo; e invero si riconosce che le cifre decimali, a partire dalla 29ª, sono le stesse che a partire dalla prima: il periodo ha dunque 28 cifre.

Frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica data

204. Dicesi *costante* una quantità che, in una questione qualunque, conserva sempre un valore fisso, unico e determinato: dicesi invece *variabile* una quantità, che può prendere diversi valori, ossia passare per diversi stati di grandezza. Per esempio, considerando

la frazione $\frac{1}{n}$, e supponendo di dare ad n tutti i valori possibili 1, 2, 3, 4, ..., abbiamo le successive frazioni $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$, che vanno sempre diminuendo fino a diventare piccole quanto si vuole. Si chiama *limite di una quantità variabile* una quantità *costante*, verso la quale il valore della variabile tende continuamente, avvicinandosi ad essa con i suoi successivi valori tanto da differirne di quantità sempre più piccole, ma senza poter mai doventare eguale a questa costante. Così, nell'esempio precedente, la frazione $\frac{1}{n}$ ha per limite 0, perchè i suoi valori successivi tendono ad impiccolire indefinitamente al crescere del denominatore, ossia si avvicinano sempre più a zero, senza però poter mai raggiungere questo valore, perchè, per quanto grande sia il denominatore n, la frazione $\frac{1}{n}$ avrà un valore infinitamente piccolo, ma che sarà sempre qualche cosa e quindi non eguale precisamente a zero.

205. Per cercare la frazione ordinaria, che ridotta in decimali dà luogo ad una frazione periodica data e che si chiama la *generatrice* di questa frazione, osserveremo che questa frazione è il *limite*, verso il quale tende il valore della frazione decimale, quando si considera un numero di cifre di più in più grande.

Consideriamo da prima una frazione periodica semplice. Abbiasi la frazione

$$0{,}342\ 342\ 342\ldots$$

Indicando con x il limite di essa, ossia il valore verso cui tende la frazione a misura che si prende un numero maggiore di periodi, per avere il vero valore

di x occorrerebbe prendere un numero infinito di periodi.

Sia a il valore approssimato di x, che si ottiene prendendo un numero di periodi limitato, tre per esempio. Avremo

$$(1) \qquad a = 0,342\ 342\ 342.$$

Moltiplicando per 1000 queste due quantità eguali, si ha

$$a \times 1000 = 342,342342.$$

Questo valore di $a \times 1000$ contiene nella sua parte decimale un periodo di meno del valore di a; e si vede che, per avere lo stesso numero di periodi nei due valori, basta aggiungere al valore di $a \times 1000$ la frazione 0,000000342 ovvero $\frac{342}{1000^3}$; si avrà dunque,

$$(2) \qquad a \times 1000 + \frac{342}{1000^3} = 342,342342342.$$

Ciò posto, sottraendo l'eguaglianza (1) dalla (2) membro a membro, osservando che nel primo membro, quando si toglie da a ripetuto 1000 volte una volta a, resta a ripetuto 999 volte e che nel secondo membro, nell'effettuare la sottrazione, si riduce a zero la parte decimale, si ottiene

$$a \times 999 + \frac{342}{1000^3} = 342.$$

Dividendo per 999 ambedue i membri dell'eguaglianza, il che si ottiene dividendo tutti i loro termini per 999, si ha

$$a + \frac{342}{999 \times 1000^3} = \frac{342}{999};$$

e, per conseguenza, togliendo da ambedue i membri $\frac{342}{999 \times 1000^3}$,

$$a = \frac{342}{999} - \frac{342}{999 \times 1000^3}.$$

Poichè in questa formula, a misura che si prende un numero maggiore di periodi, non cambia alcun numero tranne che l'esponente di 1000 nel denominatore del secondo termine del secondo membro, cioè di $\frac{342}{999 \times 1000^3}$, se si fosse indicato con a il valore approssimato di x, ottenuto prendendo n periodi, si sarebbe trovato $a = \frac{342}{999} - \frac{342}{999 \times 1000^n}$.

Se il numero n dei periodi aumenta indefinitamente, il fattore 1000^n del denominatore della frazione $\frac{342}{999 \times 1000^3}$ aumenta pure indefinitamente e quindi la frazione $\frac{342}{999 \times 1000^n}$ diviene piccola quanto si vuole, ossia tende a zero, donde segue che la quantità a ha per limite la frazione $\frac{342}{999}$. Ma il limite verso cui tende a è x, dunque si ha:

$$x = \frac{342}{999}.$$

Il ragionamento essendo generale, possiamo enunciare il teorema seguente:

La frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica semplice ha per numeratore il periodo, e per denominatore un numero formato da tante cifre 9, quante sono le cifre del periodo.

206. Osservazione. In generale si può rendere più semplice la frazione che si deduce dalla regola precedente, e far perdere al suo denominatore la forma particolare che ha. Così, nell'esempio precedente, i due termini di $\frac{342}{999}$ sono divisibili per 3 e questa frazione è uguale a $\frac{114}{333}$. Si può osservare solamente che il denominatore della frazione irriducibile equivalente alla proposta non può essere divisibile nè per 2 nè per 5, poichè il denominatore della proposta, essendo costituito di cifre tutte eguali a 9, non è divisibile per questi fattori, e perchè riducendo una frazione alla sua più semplice espressione si sopprimono dei fattori senza introdurne dei nuovi. Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Il denominatore di una frazione irriducibile, generatrice di una frazione periodica semplice, non è divisibile nè per 2, nè per 5.

207*. Se la frazione proposta è composta di una parte intera e di una parte decimale, la riduzione in frazione ordinaria si effettua con eguale facilità.

Abbiasi per esempio la frazione 52,342 342 342....; questa frazione è eguale a 52 + 0, 342 342 342...., e quindi, per ciò che precede, eguale a $52 + \frac{342}{999}$. Riducendo questa espressione ad una sola frazione, si ha:

$$\frac{999 \times 52 + 342}{999} = \frac{(1000 - 1) \times 52 + 342}{999} =$$

$$= \frac{52000 - 52 + 342}{999} = \frac{52342 - 52}{999}.$$

208*. La riduzione in frazione ordinaria di una frazione periodica mista potrebbe effettuarsi con un

procedimento analogo a quello usato innanzi (205); ma è più semplice derivarla dal numero precedente.

Abbiasi la frazione periodica mista 0,34572572572.... Moltiplicando questa frazione per 100, si ha

$$34,572\,572\,572;$$

la quale espressione è uguale a

$$\frac{34572 - 34}{999}.$$

Ma questa frazione è 100 volte maggiore di quella cercata, perchè abbiamo moltiplicato per 100 la frazione data, quindi la frazione generatrice della frazione periodica mista proposta si ottiene, dividendo per 100 il resultato ottenuto, ossia è

$$\frac{34572 - 34}{99900}.$$

Il ragionamento essendo generale, possiamo enunciare il teorema seguente:

La frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica mista ha per numeratore la differenza fra il numero formato dalla parte non periodica seguìta da un periodo ed il numero formato dalla parte non periodica, e per denominatore un numero formato da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo, seguìte da tanti zeri quante sono le cifre della parte non periodica.

209*. Se la frazione proposta ha anche una parte intera, si ottiene la sua generatrice allo stesso modo; infatti, sia la frazione periodica mista con interi

$$7,34251251251....$$

moltiplicandola per 100 si ha

$$734{,}251251251....$$

la cui generatrice (**207**) è

$$\frac{734251 - 734}{999}$$

ma questa è 100 volte maggiore di quella cercata, perchè la frazione periodica data è stata moltiplicata per 100, dunque la generatrice della proposta si otterrà dividendo per 100 il resultato ottenuto, ed avremo

$$\frac{734251 - 734}{99900}$$

210. Osservazione I. Il numeratore della frazione ordinaria, che resulta dalla regola precedente, non può terminare con uno zero. Infatti, perchè ciò potesse aver luogo, bisognerebbe che l'ultima cifra della parte non periodica fosse eguale all'ultima cifra del periodo. Ma allora il periodo comincerebbe realmente un posto prima di quello che si è supposto. E invero, supponiamo che, invece della frazione decimale considerata nel numero precedente, si abbia l'altra 7,31251251....; allora il periodo non sarà più 251 ma 125, contrariamente all'ipotesi.

Osservazione II. La frazione ordinaria, che risulta dalla regola precedente, può spesso essere ridotta a più semplice espressione. È però importante osservare che il denominatore di questa frazione, essendo formato di cifre 9 seguite da tanti zeri, quante cifre non periodiche vi sono nella frazione decimale, è divisibile per una potenza di 10, il cui esponente è eguale al numero di questi zeri, ossia contiene ciascuno dei fattori 2 e 5 tante volte quante l'indica il numero di questi

zeri. D'altra parte, il numeratore della frazione, non terminando con uno zero, non può contenere che un solo dei fattori 2 e 5. Dunque, quando si ridurrà questa frazione alla sua più semplice espressione, se non è irriducibile, il suo denominatore conserverà uno almeno dei fattori 2 o 5, con un esponente precisamente eguale al numero di zeri con cui termina.

Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Il denominatore della frazione irriducibile, generatrice di una frazione decimale periodica mista, è divisibile per l'uno o l'altro dei fattori 2 *e* 5, *preso con un esponente eguale al numero delle cifre decimali, che nella frazione decimale precedono il periodo.*

211. I teoremi dimostrati nei numeri (**195, 206, 210**) danno il modo di decidere *a priori* qual sia la natura della frazione decimale, che risulta da una frazione ordinaria irriducibile qualunque.

Trascriviamo primieramente i tre teoremi:

1° *Affinchè una frazione irriducibile possa esprimersi esattamente sotto forma di numero decimale, è necessario e sufficiente che il suo denominatore non ammetta altri fattori primi fuori che* 2 *e* 5 (**195**).

2° *Il denominatore di una frazione irriducibile generatrice di una frazione periodica semplice non è divisibile nè per* 2, *nè per* 5 (**206**).

3° *Il denominatore di una frazione irriducibile generatrice di una frazione periodica mista è divisibile per l'uno o l'altro dei fattori* 2 e 5, *preso con un esponente eguale al numero di cifre della parte non periodica* (**210**).

Queste proposizioni portano come conseguenza le seguenti:

1ª *Affinchè una frazione irriducibile ridotta in decimali produca una frazione periodica semplice, è ne-*

cessario e sufficiente che il suo denominatore non sia divisibile nè per 2, nè per 5.

Questa condizione è necessaria in virtù del secondo dei teoremi che abbiamo enunciato; ed è sufficiente, poichè, supponendola sodisfatta, il 1° ed il 3° di questi teoremi provano che la frazione decimale corrispondente alla frazione data, non può essere nè finita, nè periodica mista, e, per esclusione, bisogna allora che sia periodica semplice.

2ª *Affinchè una frazione irriducibile ridotta in decimali produca una frazione periodica mista, è necessario e sufficiente che il suo denominatore ammetta uno almeno dei fattori 2 o 5, ed altri fattori primi oltre questi.*

Queste condizioni sono necessarie in virtù del 3° e del 1° teorema; e sono anche sufficienti, perchè, supponendole sodisfatte, i teoremi 1° e 2° provano che la frazione decimale non può essere nè finita nè periodica semplice, e, per esclusione, bisogna allora che sia periodica mista.

Esempio. Se si riducessero in decimali le frazioni $\frac{3}{8}, \frac{4}{21}, \frac{17}{28}$, la prima produrrebbe una frazione finita, la seconda una frazione periodica semplice e la terza una frazione periodica mista avente due cifre non periodiche, poichè 28 contiene due volte il fattore 2.

OPERAZIONI ABBREVIATE

212. Abbiamo già detto (**194**) che non sempre nel calcolo de' numeri decimali occorre tener conto di tutte le cifre decimali per avere resultati esatti, ma che spesso bastano resultati aventi una determinata approssimazione e che anzi è talvolta impossibile ottenere rigorosa esattezza nei resultati per mancanza di dati

precisi. Vedremo ora come si possa conseguire nelle varie operazioni sui numeri decimali una determinata approssimazione nei resultati, quando non si voglia tener conto di tutte le cifre dei numeri, sui quali si effettuano i calcoli, oppure si conoscano solo valori approssimati dei numeri stessi.

Cominciamo coll'osservare che, sopprimendo in un numero decimale tutte le cifre decimali poste alla destra di una cifra qualunque, l'errore commesso è minore di un'unità dell'ultima cifra conservata. Sia, per esempio, dato il numero $e = 2,718281828459....$; conservando le *cinque prime* cifre della parte decimale, si ha $e = 2,71828$. L'errore commesso è 0,000001828.... e, per conseguenza, minore di un centomillesimo (**188**); si può anche dire che esso è minore di una mezza unità dell'ultima cifra di quelle, di cui abbiamo tenuto conto.

Se nello stesso numero e non teniamo conto che delle prime quattro cifre della parte decimale, abbiamo $e = 2,7182$; l'errore commesso è eguale a 0,0000818...., e perciò minore di un decimillesimo, ma non è minore di mezza unità dell'ultima cifra conservata, il valore della quale sarebbe 0,00005. Ma se aumentiamo di un'unità l'ultima cifra di cui si vuol tener conto, e poniamo $e = 2,7183$, l'errore sarà *in più*, ma minore di mezzo decimillesimo.

Poichè si deve sempre rendere l'errore che si commette più piccolo che sia possibile, bisogna, se si può, prendere i numeri sui quali dobbiamo operare in modo che questo errore sia minore di mezza unità dell'ultima cifra decimale di cui si tien conto. Questa condizione sarà soddisfatta, se la prima cifra soppressa è minore di 5 o se, nel caso contrario, si ha cura di aumentare di un'unità l'ultima cifra conservata.

Così, nell'esempio precedente, 2,71828 è il valore

del numero *e* approssimato a meno di mezzo centomillesimo *per difetto*, e 2,7183 è il valore di questo numero approssimato a meno di mezzo decimillesimo *per eccesso*.

La differenza fra il numero esatto e il suo valore approssimato si chiama l' *errore assoluto*, in opposto all' *errore relativo*, che è il quoziente che si ottiene dividendo l' errore commesso per il resultato esatto. Per esempio, se in luogo del numero 879,24 si pone 879,2, l' *errore assoluto* è 0,04 ossia $\frac{1}{25}$, e l' *errore relativo* è $\frac{0,04}{879,24}$ ossia $\frac{4}{87924}$, cioè $\frac{1}{21981}$.

Si dice dunque in generale che un numero approssimato ha n cifre decimali esatte, quando l'errore è, per difetto o per eccesso, minore di un' unità della n^{esima} cifra del numero stesso. In questo caso l' n^{esima} cifra del numero approssimato è la stessa che quella del numero esatto, se l' errore è per difetto, e supera invece di un' unità quella del numero esatto, se l'errore è per eccesso.

213. Osservazione. Quando un numero approssimato ha n cifre esatte si sopprimono quelle che vengon dopo la n^{esima}; però se l' errore è per difetto, bisogna aumentare di 1 la n^{esima} cifra conservata, perchè l' errore commesso trascurando le altre cifre, cumulandosi con quello per difetto già esistente, può essere eguale ed anche maggiore di un' unità dell' ultima cifra conservata.

Addizione abbreviata

214. Si voglia calcolare a meno di 0,01 la somma $2,1425679 + \frac{8}{9} + \frac{3}{7}$; si calcolino tutti questi nu-

meri per difetto, tenendo conto di tre cifre decimali esatte e si effettui l'operazione; avremo:

$$2{,}142 + 0{,}888 + 0{,}428 = 3{,}458.$$

L'errore commesso in ciascun termine è meno di 0,001 per difetto; dunque l'errore totale sarà minore di $0{,}001 \times 3$ ossia 0,003 e per difetto; la somma ha dunque tre cifre esatte; trascurando la quarta ed aumentando la terza di 1, perchè l'errore è per difetto (**213**), avremo per somma 3,46.

Possiamo dunque stabilire questa regola: *Per trovare la somma di più numeri decimali a meno di un'unità di un certo ordine si addizionano i numeri proposti, facendo astrazione in ciascuno di essi dalle cifre poste a destra di quella, che esprime unità dieci volte più piccole di quelle dell'ordine dato. Poi si sopprime una cifra alla destra del resultato ottenuto, aumentando di un'unità l'ultima cifra conservata.*

Osservazione. La regola data suppone evidentemente che si debbano addizionare meno di 12 numeri; se fossero più di 11 e meno di 102, si dovrebbe tener conto in ciascuno di essi di due cifre, in luogo che di una, alla destra di quella che esprime unità dell'ordine dato, e si sopprimerebbero due cifre, in luogo che una, alla destra della somma ottenuta colla regola esposta.

Sottrazione abbreviata

215. Si voglia calcolare la differenza $12{,}78529 - \frac{36}{7}$ a meno di 0,001. Calcoliamo questi numeri per difetto, tenendo conto di tre cifre decimali esatte ed effettuiamo poi l'operazione: avremo;

$$12{,}785 - 5{,}142 = 7{,}643.$$

Avendo soppresso nei due numeri tutte le cifre, che esprimono unità di ordine inferiore a quello dei millesimi, abbiamo commesso su ciascuno dei numeri proposti un errore assoluto, per difetto, minore di un millesimo; dunque l'errore commesso sopra la differenza esatta, sostituendole 7,643, è la differenza di due numeri minori ciascuno di un millesimo e, per conseguenza, l'errore stesso è a più forte ragione minore di un millesimo.

Quindi possiamo stabilire questa regola: *Per trovare a meno di un' unità di un certo ordine la differenza di due numeri, si effettua la sottrazione, sopprimendo in ciascuno di essi tutte le cifre poste a destra di quella, che esprime unità dell' ordine dato.*

Moltiplicazione abbreviata

216. Proponiamoci ora di risolvere le seguenti questioni:

1º Trovare, per mezzo di *fattori approssimati*, il prodotto colla maggiore esattezza possibile.

2º Trovare, per mezzo di *fattori esatti*, il prodotto con un'approssimazione indicata in precedenza e facendo il minor numero possibile di calcoli.

Un solo esempio farà capire il vantaggio ed il modo di operare con questo metodo.

Siano dati i due numeri 3,73951192 e 2,44418053; si vuole ottenere il loro prodotto con 5 cifre esatte.

Siccome la parte intera del prodotto avrà evidentemente una sola cifra, è ai decimillesimi che dovrà arrestarsi l'operazione; ma, per potere esser sicuri che la cifra dei decimillesimi sia esatta, bisognerà conoscere i centomillesimi contenuti in ciascun prodotto

parziale, a causa delle unità di ordine superiore da riportarsi, che possono esser date dai centomillesimi.

Si moltiplicherà dunque 3,73951 pei 2,44418, si scrive al disotto del moltiplicando il moltiplicatore rovesciato, ponendo la cifra 2 delle unità sotto alla cifra dei centomillesimi del moltiplicando. Questa inversione delle cifre del moltiplicatore non può avere alcuna influenza sul prodotto finale, che dipende solo dal valore dei prodotti parziali che si addizionano, e non dall'ordine nel quale sono scritti; ma da questa inversione discende che la cifra delle unità del moltiplicatore è posta sotto la cifra dei centomillesimi del moltiplicando e che, per conseguenza, il loro prodotto dà dei centomillesimi ai quali si arresta il calcolo; in seguito avanzando di uno, due, tre posti verso la sinistra del moltiplicatore si trovano unità di un ordine 10,100,1000 volte minore, mentre le unità corrispondenti del moltiplicando sono di ordine 10,100,1000 volte maggiore; per conseguenza, il prodotto di due cifre qualunque, che si corrispondono nei due fattori, rappresenta sempre unità della stessa specie, cioè a dire centomillesimi.

Si moltiplica poi il moltiplicando per ciascuna cifra significativa del moltiplicatore, cominciando ciascuna moltiplicazione dalla cifra del moltiplicando, che si trova al disopra del fattore impiegato, e tenendo conto ogni volta delle unità da riportarsi, che sarebbero state fornite dalle cifre trascurate.

Tenendo conto di questi riporti, non solo i prodotti parziali sono più approssimati al loro valore esatto, ma anche, quando una cifra si trova ripetuta una o più volte nel moltiplicatore, non si ha che da copiare il prodotto già ottenuto prima, sopprimendovi in fine tante cifre quanti sono i posti, di cui la cifra è

avanzata, e forzando l'ultima cifra del prodotto, quando la parte soppressa è maggiore di mezza unità.

I prodotti parziali così ottenuti rappresentano tutti centomillesimi e si scrivono quindi gli uni sotto gli altri in maniera che le ultime cifre a destra si corrispondano, cioè senza *scalare;* poi si effettua l'addizione.

Così nell'esempio proposto, il *primo prodotto* sarà 2 volte 373951 ossia 747902.

Per il *secondo prodotto* non si adopera che la parte 37395, che si moltiplica per 4, e si ottiene 149580.

Per ottenere il *terzo prodotto* si moltiplica 3739 per 4, e, poichè questa cifra del moltiplicatore è eguale alla precedente, non si ha che da copiare il *secondo prodotto*, sopprimendo l'ultima cifra; si ottiene 14958.

Il *quarto prodotto* è eguale a 373 moltiplicato per 4; abbiamo dunque ancora una volta il moltiplicatore 4; basta dunque limitarsi a sopprimere l'ultima cifra del terzo prodotto aumentando di 1 la cifra 5 perchè la cifra soppressa è 8. Così di seguito.

L'insieme del calcolo è il seguente:

$$
\begin{array}{r}
373951 \\
814442 \\
\hline
747902 \\
149580 \\
14958 \\
1496 \\
37 \\
30 \\
\hline
914003
\end{array}
$$

ed il resultato è 9,1400 le cui cinque cifre sono esatte.

Cambiando l'ordine dei fattori, il resultato sarà evidentemente lo stesso. Così si avrebbe in modo analogo:

$$\begin{array}{r}
244418 \\
159373 \\
\hline
733254 \\
171093 \\
7333 \\
2200 \\
122 \\
2 \\
\hline
914004
\end{array}$$

il resultato con cinque cifre esatte è dunque 9,1400 come quello ottenuto prima. Le ultime cifre, che abbiamo ottenute nei due prodotti non sono, è vero, le stesse; ma la differenza, che proviene dalle cifre soppresse od aumentate differentemente nei due esempî, non ha che fare altro che con unità, delle quali non si deve tener conto, cioè centomillesimi.

Infine, per apprezzare l'errore commesso, osserviamo che, ad eccezione del primo prodotto parziale, tutti gli altri sono esatti a meno di una mezza unità dell'ultimo ordine; quanto al primo prodotto parziale, esso potrà essere in difetto di mezza unità moltiplicata per la prima cifra del moltiplicatore; di più, questi errori parziali possono essere in senso inverso e compensarsi a vicenda.

Così, nell'ultimo esempio, la prima cifra del moltiplicatore è 2; il numero delle altre cifre è cinque; per conseguenza, l'errore nel resultato ottenuto è minore di $(2+5)$ mezze unità dell'ultimo ordine, ossia è minore di $3\frac{1}{2}$ unità dell'ultimo ordine.

Altro esempio. Si vuole ottenere il prodotto di 0,4342944819 per 2,3978952728 a meno di 1 milionesimo. Disporremo al solito l'operazione nel modo seguente:

```
   4342945
   5987932
   -------
   8685890
   1302884
    390865
     30401
      3474
       391
        22
  --------
 1,0413927
```

Il prodotto cercato è 1,041393.

Possiamo dunque stabilire la seguente regola: *Si scrive il moltiplicando; poi sotto ad esso il moltiplicatore colle cifre disposte in ordine inverso, in modo che quella delle unità si trovi sotto la cifra del moltiplicando, che rappresenta unità di un ordine dieci volte minore a quello, che indica il grado di approssimazione voluta. Si fanno poi le moltiplicazioni parziali cominciando, per ciascuna, dalla cifra del moltiplicando, che si trova sopra la cifra del moltiplicatore, che si adopera, ma tenendo conto dei riporti, che darebbe il prodotto di detta cifra per quelle trascurate nel moltiplicando. I prodotti parziali si scrivono uno sotto l'altro senza scalare, indi se ne fa l'addizione. Si sopprime poi l'ultima cifra del prodotto ottenuto, forzando, se occorre, la precedente e si pone la virgola al prodotto in modo che l'ultima cifra esprima unità dell'ordine indicante l'approssimazione voluta.*

Divisione abbreviata

217. Lo scopo che ci proponiamo è il seguente:

1° Essendo dati il dividendo ed il divisore con una certa approssimazione, trovarne il quoziente con la maggiore esattezza possibile.

2° Essendo il dividendo ed il divisore esatti, trovarne il quoziente con una approssimazione determinata in precedenza e facendo il minor numero possibile di calcoli.

Prima di esporre il metodo della divisione abbreviata, cercheremo di determinare l'errore prodotto dalla soppressione di un certo numero di cifre alla destra del dividendo o del divisore. Per questo dimostreremo i due teoremi che seguono.

Teorema I. *Sopprimendo un numero qualunque di cifre decimali alla destra del dividendo, il quoziente viene approssimato per difetto; e l'errore è minore del quoziente ottenuto, diviso per il dividendo ridotto, scritto senza virgola.*

Abbiasi, per esempio, da dividere 24,328915 per un divisore qualunque dato; se si prendono soltanto le quattro prime cifre del dividendo, cioè 24,32, il quoziente che si ottiene è troppo piccolo, e l'errore sarà minore del quoziente stesso diviso per 2432.

Infatti, poniamo prima la virgola del dividendo fra le cifre conservate e quelle soppresse ed avanziamo la virgola nel divisore di altrettanti posti nello stesso senso; si sa che questa modificazione non cambia in nulla il quoziente (**67**).

Se rappresentiamo con D il divisore così modifi-

cato, il quoziente ottenuto sarà eguale a $\frac{2432}{D}$; il quoziente esatto è dunque eguale a

$$\frac{2432,8915}{D} = \frac{2432}{D} + \frac{0,8915}{D};$$

dunque l'errore commesso nel quoziente è eguale a $\frac{0,8915}{D}$, ossia minore di $\frac{1}{D}$; dunque esso è minore di $\frac{1}{2432}$ del quoziente ottenuto.

Esempio. Debbasi dividere 468,15515 per 21,48. Prendendo le sole quattro prime cifre del dividendo, il quoziente è 21,7924 con un errore minore di $\frac{21,79}{4681}$ ossia di 0,004; dunque il quoziente ottenuto è esatto a meno di 4 unità della quinta cifra significativa.

Abbiamo dimostrato precedentemente che, sopprimendo nel dividendo *meno di un' unità* dell'ultima cifra conservata, l'errore nel quoziente è minore del quoziente ottenuto diviso per il dividendo ridotto scritto senza virgola; per conseguenza, quando la somma delle cifre soppresse nel dividendo è *minore di mezza unità* dell'ultima cifra conservata, l'errore nel quoziente è minore della metà del quoziente ottenuto diviso per il dividendo ridotto scritto senza virgola. Infine, se prendiamo il dividendo approssimato per eccesso a meno di una mezza unità, il quoziente sarà troppo grande; l'errore sarà in più e minore della metà del quoziente ottenuto diviso per il dividendo ridotto.

Esempio. Abbiasi da dividere 3,8832456 per 0,6224; prendendo le sole quattro prime cifre del dividendo 3,883, l'errore commesso nel dividendo è minore di mezza unità dell'ultimo ordine; il quoziente ottenuto è 6,2388

e l'errore è minore di $\frac{6,2}{2 \times 3883}$ ossia di 0,0009; dunque il quoziente è approssimato a meno di 9 unità della quinta cifra significativa.

218. Teorema II. *Sopprimendo un numero qualunque di cifre decimali alla destra del divisore, il quoziente è approssimato per eccesso, e l'errore è minore del quoziente ottenuto diviso per il divisore ridotto scritto senza virgola.*

Si abbia, per esempio, da dividere un numero dato per 22,667121; prendendo solamente le quattro prime cifre del divisore 22,66, si commette nel quoziente un errore *in più* minore del quoziente ottenutó diviso per 2266.

Infatti, poniamo prima la virgola nel divisore fra le cifre conservate e quelle soppresse, ed avanziamo la virgola nel dividendo di altrettanti posti e dalla stessa parte; questa modificazione non altera il quoziente (**67**).

Indicando con q il quoziente esatto della divisione per 2266,7121, avremo:

$$\textit{Dividendo} = 2266,7121 \times q$$

ossia

$$\begin{aligned}\textit{Dividendo} &= (2266 + 0,7121) \times q \\ &= 2266 \times q + 0,7121 \times q;\end{aligned}$$

dunque dividendo tutti i termini di ambedue i membri di questa eguaglianza per 2266, si ha:

$$\frac{\textit{Dividendo}}{2266} = q + \frac{0,7121}{2266} \times q.$$

Ma q è il quoziente esatto; dunque, dividendo per il divisore ridotto 2266, si ottiene un quoziente approssi-

mato, che supera il quoziente esatto di $\frac{0,7121}{2266} \times q$; e questo errore è minore di $\frac{q}{2266}$ perchè il fattore 0,7121 è minore d' 1. Se il dividendo è approssimato a meno di *mezza unità*, l' errore è minore della metà del quoziente ottenuto diviso per il divisore ridotto scritto senza virgola.

Esempio. Abbiasi da dividere 193,75 per 22,6671234.... Riducendo il divisore alle sue prime quattro cifre decimali 22,66, il quoziente è 8,5503, e l' errore è minore di $\frac{8,5}{2266}$, ossia di 0,0038; dunque il resultato è esatto a meno di 4 unità della quarta cifra significativa.

Coll' aiuto dei due teoremi precedenti, è sempre facile risolvere le due questioni che si presentano nella divisione abbreviata.

1° Conoscendo il dividendo e il divisore con una certa approssimazione, determinare con quale approssimazione si può ottenere il quoziente.

2° Essendo richiesto il quoziente con un' approssimazione determinata, determinare il numero di cifre, che bisogna prendere al dividendo ed al divisore.

Esempio. Dati due numeri 9,012 e 2,187, approssimati l' uno e l' altro al vero a meno di un millesimo determinare il grado d' approssimazione del quoziente.

Il quoziente ottenuto è 4,120; per conseguenza l' errore che proviene dall' inesattezza del dividendo è minore di $\frac{4,1}{9012}$; quello che proviene dall' inesattezza del divisore è minore di $\frac{4,1}{2187}$; dunque l' errore totale

commesso nel quoziente è minore di $\frac{4,1}{9012} + \frac{4,1}{2187}$, ossia di 0,0023, ed il quoziente ottenuto è esatto a meno di 2 unità della quarta cifra significativa.

È evidente che questo errore sarebbe 10 volte maggiore, se fossero state prese tre cifre al dividendo ed al divisore, e sarebbe 10 volte più piccolo, se si fossero prese 5 cifre al dividendo ed al divisore.

219. Supponiamo che debba trovarsi il quoziente della divisione di 91,4004 per 37,3951, essendo ambedue questi numeri approssimati al vero a meno di un centomillesimo.

Si chiama 91,4004 il *primo dividendo* e 37,3951 il *primo divisore*.

Si cerca prima di tutto la prima cifra del quoziente, che è 2; il resto ottenuto è il *secondo dividendo*.

Siccome il quoziente della seconda divisione rappresenta unità di un ordine dieci volte inferiore a quello della prima cifra del quoziente, non vi è bisogno, per avere lo stesso grado di esattezza, che di sei cifre al dividendo; per conseguenza possiamo sopprimere l'ultima cifra del divisore. Dunque il *secondo divisore* è 37395, e dividendo per questo numero il secondo dividendo, che è 166102, si ottiene la seconda cifra del quoziente, che è 4; il resto 16522 è il *terzo dividendo*.

Sopprimendo l'ultima cifra del secondo divisore, abbiamo il *terzo divisore* 3739, che dà la terza cifra del quoziente e lascia per resto 1564 *quarto dividendo;* nell'ultima moltiplicazione si sono aggiunte 2 unità al prodotto di 3739 per 4: queste 2 unità provengono dal riporto dato dalla cifra 5 soppressa al terzo divisore, ma di cui si tien conto per attenuare, per quanto è possibile, gli errori commessi.

Si continua l'operazione sempre allo stesso modo fino a che si siano ottenute tutte le cifre del quoziente. La disposizione del calcolo sarà la seguente:

$$\begin{array}{r|l} 91400\dot{4} & 3\dot{7}\dot{3}\dot{9}\dot{5}\dot{1} \\ \cline{2-2} 166102 & 244418 \\ 16522 & \\ 1564 & \\ 68 & \\ 31 & \end{array}$$

Il quoziente ottenuto è 2,44418. Determiniamo ora il grado di esattezza di questo quoziente.

L'errore commesso nel quoziente proviene da due cause; prima dall'inesattezza del primo dividendo e del primo divisore, poi dalle riduzioni successive operate sul divisore.

Il primo errore, quello cioè che proviene dalla soppressione dell'ultime cifre del dividendo e del divisore, è minore del quoziente ottenuto diviso per il dividendo scritto senza virgola, più questo stesso quoziente diviso per il divisore scritto senza virgola; l'errore può essere molto minore ed anche nullo; ma in ogni caso è inferiore alla somma delle due frazioni ora dette.

Essendo il quoziente poco sopra ottenuto 2,44418, l'errore è minore di $\frac{2,4}{914004} + \frac{2,4}{373951}$.

Osserviamo che la prima di queste due frazioni ha per numeratore il quoziente della divisione e per denominatore il dividendo; dunque, dividendo ambedue i termini di questa frazione per il quoziente, essa diviene $\frac{1}{373951}$ e l'errore nel quoziente è quindi minore di $\frac{3,4}{370000}$, ossia di 0,00001.

Ci resta ancora da valutare il secondo errore, cioè quello che proviene dalle riduzioni successive del divisore.

Per ottenere le sei cifre del quoziente, noi abbiamo fatto sei divisioni parziali, ciascuna delle quali ha fornito la cifra corrispondente del quoziente.

Il prodotto del primo divisore per la prima cifra del quoziente essendo rigorosamente esatto, il primo resto 166102 lo è pure.

Facendo la seconda divisione parziale, abbiamo sottratto dal primo resto il prodotto della seconda cifra del quoziente per il primo divisore dopo avere in esso soppresso l' ultima cifra; siccome noi teniamo conto dei riporti che sarebbero stati dati dalle cifre trascurate, questo prodotto è approssimato a meno di una mezza unità, e, sottraendolo dal primo resto, trasportiamo l' errore commesso nel secondo resto; per conseguenza il secondo resto 16522 è in difetto meno di una mezza unità.

Facendo la terza divisione parziale, abbiamo sottratto dal secondo resto un prodotto approssimato al vero a meno di mezza unità: questo errore di mezza unità viene a portarsi, per effetto della sottrazione, sul terzo resto e si aggiunge necessariamente a quello commesso nel secondo resto; dunque il terzo resto 1564 sarà in difetto meno di due mezze unità.

Continuando lo stesso ragionamento, si vede che noi portiamo sull' ultimo resto altrettanti errori quanti prodotti parziali andiamo effettuando, di cui ciascuno aggiunge agli errori precedenti un nuovo errore di mezza unità.

Per conseguenza:

il 4° resto è in difetto di meno di 3 mezze unità
il 5° » » » 4 »
e il 6° » » » 5 »

Si vede che tutti gli errori delle divisioni parziali si trovano trasportati sull'ultimo resto. Ora ogni divisione parziale, ad eccezione della prima, che è rigorosamente esatta, non porta sull'ultimo dividendo che un errore minore di mezza unità. Questi successivi errori possono compensarsi; ma, nel caso più sfavorevole, son sempre minori ciascuno di mezza unità dell'ultimo ordine. Per conseguenza, la somma di tutti gli errori sull'ultimo dividendo sarà minore di cinque mezze unità, e questo errore, diviso per la prima cifra del divisore darà per resultato finale un errore, che, nel caso attuale, è minore di una unità della sesta cifra del quoziente.

In una parola, l'errore totale del quoziente, proveniente da tutte le riduzioni del dividendo e del divisore, è minore di due unità dell'ultima cifra del quoziente, ed il quoziente richiesto è eguale a 2,4442 con cinque cifre esatte.

Esempio. Si vuole il quoziente di 3851,265134 per 12,34567123..... a meno di 0,001:

3851265	1234567
147564	3119527
24107	
11761	
650	
33	
9	

Il quoziente cercato è dunque 311,953.

Abbiamo quindi questa regola: *Si determina il numero delle cifre, che deve avere il quoziente; si prende il divisore con una cifra più del numero di cifre che abbiamo trovato avere il quoziente; e per dividendo si prende a sinistra del dividendo dato un numero,*

che contenga il divisore ridotto più di una volta e meno di dieci. Si fa poi la divisione al modo ordinario, meno che invece di abbassare una cifra del dividendo a destra d' ogni resto, se ne sopprime una a destra del divisore. Nel fare i prodotti parziali delle cifre, che si trovano al quoziente, per il divisore adoperato si tien conto dei riporti, che verrebbero dal prodotto di dette cifre per quelle trascurate nel divisore e si continua l' operazione finchè si ottenga al quoziente il numero di cifre voluto.

Esercizi

I. La frazione periodica 0,375375375 .... ha per limite $\frac{375}{999}$ o $\frac{375375}{999999}$, secondochè si prende per periodo 375 o 375375: provare a priori l' eguaglianza di queste frazioni.

II. La frazione periodica mista 0,57832832832.... può essere considerata come avente 283 per periodo e 5783 per parte non periodica; il limite è allora $\frac{5783283-5783}{9990000}$: provare la identità di questo resultato con quello che si ottiene, considerando la parte non periodica come ridotta a 57 ed il periodo a 832.

III. Se una frazione irriducibile ha per denominatore un numero primo, ed il periodo della frazione decimale da essa generata ha un numero pari di cifre, la somma delle cifre, che occupano lo stesso posto in ciascun mezzo periodo, sarà sempre eguale a 9.

IV. Se due frazioni irriducibili hanno lo stesso denominatore e si riducono l' una e l' altra in decimali, i periodi avranno lo stesso numero di cifre.

V. Se si riduce in decimali una frazione ordinaria $\frac{m}{p}$ ed il periodo ha $p-1$ cifre, disponendo queste cifre

in cerchio in maniera che non vi sia più nè prima, nè ultima, il cerchio così ottenuto sarà indipendente dal numeratore m.

ESEMPIO:

$$\frac{1}{7}=0{,}142857142857....$$

$$\frac{4}{7}=0{,}571428571428....$$

Questi due periodi disposti in cerchio danno l' uno e l' altro,

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 7 & & 4 \\ 5 & & 2 \\ & 8 & \end{array}$$

Per ottenere il primo bisogna leggere le cifre cominciando da 1, ed il secondo cominciando da 5.

VI. Se si riducono in decimali tutte le frazioni irriducibili, di cui il denominatore è un numero primo p, e se si dispongono in cerchio i resti ottenuti nell' operazione, il numero dei cerchi distinti, che si potranno formare in questa maniera, è un divisore di $p-1$. Dedurre da ciò, che il numero dei resti, che formano uno di questi cerchi, e, per conseguenza, il numero delle cifre di un periodo è pure un divisore di $p-1$.

VII. Se due frazioni irriducibili $\frac{N}{D}$, $\frac{n}{d}$, convertite in decimali, danno luogo a periodi composti rispettivamente di M, m cifre, nel caso in cui D è divisibile per d, il numero M è egualmente divisibile per m.

VIII. Se più frazioni irriducibili, di cui i denominatori sono primi fra loro, o non hanno altri fattori comuni che potenze di 2 o 5, danno luogo a periodi di m, m', m'', ... cifre, qualunque frazione irriducibile, avente per denominatore il prodotto dei denominatori delle prime, conduce a un periodo, il numero delle cifre del quale è il minimo multiplo di m, m', m'', ... ecc.

IX. p essendo un numero primo, se $\frac{1}{p^h}$ produce un periodo di m cifre, $\frac{1}{p^{h+1}}$ produrrà un periodo, in cui il numero delle cifre sarà m o mp. Se quest' ultimo caso ha luogo, $\frac{1}{p^{h+a}}$ produrrà un periodo di mp^a cifre.

X. Dal 15 aprile 1838 al 30 settembre 1849 furono cavati dalle mine di Pontgibaud 42750 metri cubi di roccia, che hanno fornito, dopo la lavatura, 7304496 chilogrammi di minerale. Da questo minerale si sono cavati 1258708 chilogrammi di piombo e chilogrammi 7656,346 d' argento. Dedurre da questi dati, a meno di un millesimo di chilogrammo, il peso del minerale cavato da un metro cubo di roccia estratta, e la quantità di piombo e di argento che corrisponde a 1250 chilogrammi di minerale.

XI. I dati essendo gli stessi della questione precedente, si valuta il metallo contenuto in 100 chilogrammi di minerale a fr. 32,19. Grammi 4,50 d' argento valendo un franco, a qual prezzo si valuta il piombo?

XII. Nella fabbrica di Tsiklovah (Ungheria) si trattano annualmente 112500 quintali metrici di minerale di rame argentifero. Il minerale contiene 2,40 per 100 di rame, e 0,0000695 d' argento. La perdita in rame è di 4 per cento, e la perdita in argento di 5 per cento. Calcolare i prodotti annuali ed il loro valore, valutando il chilogrammo d' argento a 220 franchi e il quintale di rame a 210 franchi.

XIII. I dati essendo gli stessi che quelli della questione precedente, valutare le quantità di mercurio consumato annualmente nella fabbrica di Tsiklovah, sapendo che si comincia per estrarre il rame dal minerale, poi che si estrae l' argento da quest' ultimo mediante il mercurio, la perdita in mercurio essendo di 0,00127 per uno di rame.

XIV. Le fabbriche di zinco della Slesia trattarono nel 1838, 140830 quintali metrici di minerale, che rendevano il 32 per 100. Il prezzo dello zinco era allora di

fr. 18,75 al quintale; nel 1846 il prezzo si elevò a fr. 37,50 al quintale e furono trattati 1180950 quintali di minerale, di cui la rendita era di 17 per 100. Qual'è il rapporto dei valori prodotti nel 1838 e nel 1846?

XV. I dati essendo gli stessi delle questioni precedenti, trovare il prezzo del minerale fuso nel 1846, sapendo che si pagava fr. 37,50 i mille chilogrammi. Trovare egualmente il prezzo del carbone, sapendo che si bruciano 752 chilogrammi di carbone per produrre 100 chilogrammi di zinco, e che 1000 chilogrammi di carbone valgono fr. 5,26.

XVI. Le miniere di rame dell'Inghilterra produssero in un anno 152615 tonnellate di minerale, dalle quali furono estratte 13900 tonnellate di rame. Durante lo stesso anno furono importate in Inghilterra 41490 tonnellate di minerale straniero (Chilì e Australia), che produssero 9009 tonnellate di rame. Qual è la ricchezza in rame del minerale indigeno e quella del minerale importato?

XVII. Qual'è, secondo i dati precedenti, il peso del carbone consumato nel trattamento metallurgico dei minerali di rame dell'Inghilterra, sapendo che per ogni chilogrammo di minerale si consumano fr. 538 di carbone?

XVIII. Si hanno due botti piene di vino della stessa qualità, ma la seconda ne contiene ettolitri 2,4 più della prima. Si vende il vino della prima per L. 453,60 e quello della seconda per L. 554,40. Quanti ettolitri contiene ciascuna botte?

XIX. Fu comprata una pezza di velluto a ragione di L. 122,50 ogni 14 metri e rivenduta in ragione di L. 67,425 ogni m. 7,25: in tal modo si sono avute L. 35,365 di guadagno. Quanti metri era lunga la pezza?

XX. Un signore ed una sua figlia fanno l'elemosina ad un povero e la figlia dà tanti soldi quante lire dà il padre. Il povero spende $\frac{1}{3}$ di quanto riceve e resta con L. 8,40. Quanto gli aveva dato il padre e quanto la figlia?

XXI. Un negoziante vuol vendere una pezza di panno

di m. 146,25 nella quale vuol guadagnare il 10 %: per ottenere il suo scopo deve rivenderla a L. 16,80 al metro. Ma per isbaglio il suo commesso ne ha già venduto i $\frac{3}{10}$ a L. 14,16 al metro. A quanto al metro dovrà smerciare il resto per fare lo stesso guadagno? Quanto era costata a lui la pezza?

XXII. Sono state introdotte in una città le seguenti quantità di ferro dall'estero: quintali 350,436 in una spedizione, quintali 683,54 in un'altra e quintali 93,538 in una terza. Sapendo che il valore del dazio è 0,07 del valore totale del ferro, che è L. 5,64 al chilogrammo, e che quello del trasporto è $\frac{23}{400}$ del valore medesimo, si domanda: 1° Il valore del ferro importato, quello del dazio, e il prezzo del trasporto. 2° Quanto costa un quintale di ferro tutto compreso.

XXIII. In una miniera di carbon fossile si estraggono annualmente quintali 3602,432 di carbone, e vi s'impiegano 256 operai, ciascuno dei quali lavora 8 ore al giorno e riceve L. 0,24 per ora. Il carbone si vende in ragione di L. 0,65 ogni quintali 0,08. Si vuol sapere: 1° Qual'è la produzione media annua di un operaio. 2° Quanto riceve ciascuno e quanto tutti, in un anno di 360 giorni. 3° Quanto riceve in un anno un operaio per ciascun quintale di carbone estratto. 4° La somma ricavata dalla vendita del carbone.

XXIV. Ammettiamo che un cavallo consumi giornalmente chilogrammi 5,50 di fieno secco e chilogrammi 5 di paglia. Si sa che 100 fasci di paglia costano L. 28,35 e 100 fasci di fieno L. 37,95: il peso di un fascio è 5 chilogrammi. Quanto costerà il mantenimento annuo dei cavalli di un reggimento di cavalleria che ne ha 956?

XXV. Un operaio, che lavora in una fabbrica di stoviglie, riceve L. 0,15 per ogni piatto che lavora bene, e paga L. 0.12 per ogni piatto, che rompe. In due giorni, nei quali ha lavorato 120 piatti, riscuote L. 11,25: quanti piatti ha rotto?

CAPITOLO X

SISTEMA METRICO DECIMALE

220. Il *sistema metrico decimale* è il complesso delle *misure*, che hanno per base il metro, e che son quelle adottate anche nel Regno d'Italia per gli usi pratici della vita comune. Teoricamente, secondo le definizioni già date in principio dell'Aritmetica (**3**), per misurare una grandezza può prendersi un'altra grandezza qualunque per unità di misura, la quale non è soggetta ad altra condizione che di essere omogenea colla grandezza da misurarsi. Però, se questo è ammissibile in teoria, nelle applicazioni pratiche è naturale che vi siano certe unità di misura determinate, delle quali tutti per comune accordo facciano uso, poichè in caso diverso si genererebbe confusione.

221. Le principali grandezze, che occorre misurare nella pratica, sono le *lunghezze*, le *superficie*, i *volumi* o *capacità*, i *pesi*, i *valori*; è per questo che occorrono varie *unità di misura*, ossia unità di lunghezza, di superficie, di volume, di capacità, di peso e di valore o di moneta. Sistemi di misure son sempre esistiti presso le diverse nazioni, fino da tempi antichissimi, ma presentavano varî inconvenienti, di cui ecco i principali: 1° Arbitrarietà ed incertezza nell'unità principale di misura, che generalmente era la media di certe grandezze variabili, come ad esempio il piede,

la canna ecc. Questo portava che, essendo tutto ciò che è materiale soggetto ad alterazione coll'andar del tempo, se ad una certa epoca si fosse voluto controllare le unità di misura adoperate e determinarle di nuovo, si sarebbero trovate delle nuove unità differenti da quelle usate fino allora, nè la tradizione sarebbe stata sufficiente a tramandarle senza alterazioni. 2° Le unità di misura delle varie specie non avevano nessuna relazione le une colle altre, ma erano affatto indipendenti, e quindi, volendo, come abbiam detto, verificare ad una certa epoca queste unità di misura, sarebbe occorso un lavoro speciale per ciascuna specie di misure. 3° Difficoltà e lunghezza nei calcoli, perchè, come vedremo in seguito, faceva d'uopo seguire regole speciali per effettuare le varie operazioni sui numeri esprimenti misure, regole che richiedono molta pratica ed attenzione; ne veniva che facilmente si poteva andare incontro ad errori. 4° Diversità di unità di misure non solo da nazione a nazione, ma anche da città a città di uno stesso stato, inconveniente fortissimo specialmente al giorno d'oggi, tenuto conto dell'immenso sviluppo preso dal commercio e dall'industria coi facili e pronti mezzi di comunicazione, che abbiamo.

Era quindi universalmente sentito il bisogno di ovviare a tutti questi inconvenienti mediante una radicale riforma nel sistema di misure, mediante la ricerca di un nuovo sistema, che potesse vantaggiosamente sostituirli. L'idea di questa riforma nacque in Francia, dove nel 1790 l'Assemblea Costituente decretò l'impianto di un sistema generale ed uniforme di nuove misure. L'incarico ne fu affidato dall'Accademia delle Scienze di Parigi a *Borda*, *Lagrange*, *Laplace*, *Monge* e *Condorcet*. Nel 1799 furono ultimati i lavori della

commissione ed il 22 giugno di quell'anno furon depositati negli Archivî di Stato i campioni del *metro* e del *chilogrammo* (unità di misura di lunghezza e di peso).

222. Gli studî dei dotti incaricati del lavoro furon rivolti principalmente a trovare un'unità di misura fondamentale, (quella di lunghezza), tale che non potesse subire alcuna alterazione coll'andar del tempo, e che si potesse controllare in seguito a qualunque epoca, colla certezza di ritrovare la stessa misura primitiva. Era facile il comprendere che bisognava perciò ricorrere a qualche cosa non materiale, perchè tutto ciò che è materiale si altera per effetto del tempo e degli agenti esterni; pensarono quindi a scegliere una lunghezza geometrica, cioè una parte di una linea determinata, che fu la *quarantamilionesima parte del meridiano terrestre*, alla quale dettero il nome di *metro*, parola, che in greco vuol dir *misura*, quasi che quella trovata fosse, come lo è difatti, la misura per eccellenza, preferibile a tutte le altre.

Stabilita questa unità fondamentale, dovettero studiare il modo di far sì che tutte le altre unità di misura discendessero da questa e vi giunsero fissando le seguenti: per le superficie il *metro quadrato*, cioè un quadrato avente un metro di lato; per i volumi il *metro cubo*, cioè un cubo avente un metro di spigolo; per le capacità il *litro*, un cubo avente un decimetro di spigolo; per i pesi il *grammo*, che è il peso, nel vuoto, di un *centimetro cubo* di acqua distillata, alla temperatura di 4^0 centigradi sopra zero: per le monete la *lira* o *franco*, che è un pezzo d'argento e rame del peso di 5 grammi. Evidentemente in tal modo, verificata a qualunque epoca la lunghezza del metro, resultano controllate anche le altre unità di misura, che son tutte collegate con questa.

Restava ad ovviare all' altro inconveniente, cioè della lunghezza dei calcoli ed a questo presero facilmente rimedio. Poichè una sola misura per ciascuna specie non è evidentemente bastante per gli usi pratici, ma occorre avere anche un certo numero di suoi multipli e sottomultipli, fissarono che questi multipli e sottomultipli delle varie unità di misura procedessero di *dieci in dieci*, cioè che di ogni misura si avessero i multipli secondo i numeri 10, 100, 1000, 10000, ed i sottomultipli secondo i numeri 10, 100, 1000. Così, come vedremo in seguito, si possono scrivere i numeri esprimenti misure precisamente come i numeri decimali, ed anche effettuare i calcoli su quelli come si effettuano su questi, cioè colla massima facilità.

Quello che non è stato ancora possibile eliminare del tutto è l' ultimo inconveniente, cioè quello della diversità nei sistemi di misure da nazione a nazione. È ben vero che per i vantaggi incontestabili, che presenta il sistema metrico decimale sopra tutti gli altri, quasi tutte le nazioni, almeno d' Europa, lo hanno adottato; ma in molte è semplicemente facoltativo e son tollerati gli antichi sistemi, ed in molte restano ancora obbligatorie le antiche misure specialmente *di valore*.

Denominazioni e simboli che si usano per le diverse misure

223. Per enunciare i multipli delle diverse misure secondo i numeri 10, 100, 1000, 10,000 si usano le parole *Deca*, *Etto*, *Chilo*, e *Miria* (prese dalla lingua greca, nella quale esprimono appunto i numeri ora detti) seguite dal nome della misura che si vuol dire: per esempio, *ettogrammo* vuol dire 100 grammi. Per

enunciare invece i sottomultipli secondo i numeri 10, 100, 1000 si usano le parole *deci*, *centi*, *milli*, (prese dalla lingua latina), seguite dal nome della misura considerata: così *decimetro* vuol dire un decimo di metro.

224. Per quello che si riferisce alla rappresentazione delle varie unità di misura e dei loro multipli e sottomultipli, il Comitato internazionale dei Pesi e Misure stabilì nel 1879 di invitare i Governi ad adottare certi simboli, che si raccomanda di tenere presenti.

Metro	**Metro quadrato**	**Ara**	**Metro cubo**	**Stero**	
m	m^2	a	m^3	s	
Litro	**Grammo**	**Quintale**	**Tonnellata**	**Deca**	**Etto**
l	g	q	t	da	h
Chilo	**Miria**	**deci**	**centi**	**milli**	**micron**
k	M	d	c	m	μ

Per scrivere un multiplo o un sottomultiplo di una qualunque unità di misura si scrive il simbolo del multiplo o sottomultiplo seguìto dal simbolo dell' unità considerata. Così *dag* significa *Decagrammo; Mm miriametro; dl decilitro, ca centiara* e via di seguito. Al *da* si potrebbe più semplicemente sostituire D, come si usa da molti.

225. Abbiamo accennato finora in generale alle misure *teoriche*, cioè quelle stabilite come fondamentali nel sistema metrico. Avvertiamo ora che, siccome queste misure sarebbero poche per gli usi pratici, la legge ha provveduto a questo inconveniente, determinando che le *misure effettive*, cioè quelle che si usano

realmente nella pratica, siano in numero maggiore, disponendo che i loro multipli e sottomultipli si succedano invece che di dieci in dieci, di 2 in 5, in 10, cioè che da ogni unità di misura si passi al doppio, al quintuplo e poi al decuplo di essa, oppure alla metà, alla quinta parte e poi al decimo. Notiamo pure che alcune unità di misura non esistono realmente sotto forma di strumenti pratici, ma si adopera solo il valore di esse nel linguaggio e nel calcolo, e si dicono *misure di conto.*

Passiamo ora a studiare più particolarmente le varie specie di misure.

Misure di lunghezza

226. Abbiamo già detto che l'unità di misura lineare, cioè il *metro*, è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre. Esso è rappresentato da un *prototipo* o *metro campione* di platino, deposto negli Archivî di Stato, che, alla temperatura del *ghiaccio fondente*, dà la lunghezza *legale* (non assolutamente esatta) del metro: la vera lunghezza di questo, che ne differisce di una quantità piccolissima dicesi *metro astronomico:* il metro legale è più corto del metro astronomico di circa $\frac{9}{100}$ di millimetro.

Ecco le tavole delle misure di lunghezza, effettive e di conto.

		NOMI	Simboli	VALORI	*Osservazioni*
Di conto	Itine-rarie Geografi-che	Miriametro	Mm	10000 metri	Il Miriametro ed il Chilometro diconsi misure *geografiche* ed è facile capirne il perchè; così pure il Chilometro e l'Ettometro si dicono *misure itinerarie*; sono tutte di conto. Il *trimetro* è tollerato dalla legge per comodo dell'agrimensura.
		Chilometro	km	1000 »	
		Ettometro	hm	100 »	
Effettive		Doppio decametro.	.....	20 »	
		Decametro	dam o Dm	10 »	
		$\frac{1}{2}$ decametro	.....	5 »	
		Trimetro o canna metrica	.....	3 »	
		Doppio metro	.....	2 »	
		Metro	m		
		$\frac{1}{2}$ metro	.....	$\frac{1}{2}$ metro	
		Doppio decimetro..	.....	$\frac{1}{5}$ di metro	
		Decimetro	dm	$\frac{1}{10}$ »	
Di conto		Centimetro	cm	$\frac{1}{100}$ »	
		Millimetro	mm	$\frac{1}{1000}$ »	
		Micron	μ	$\frac{1}{1000}$ di millimetro	

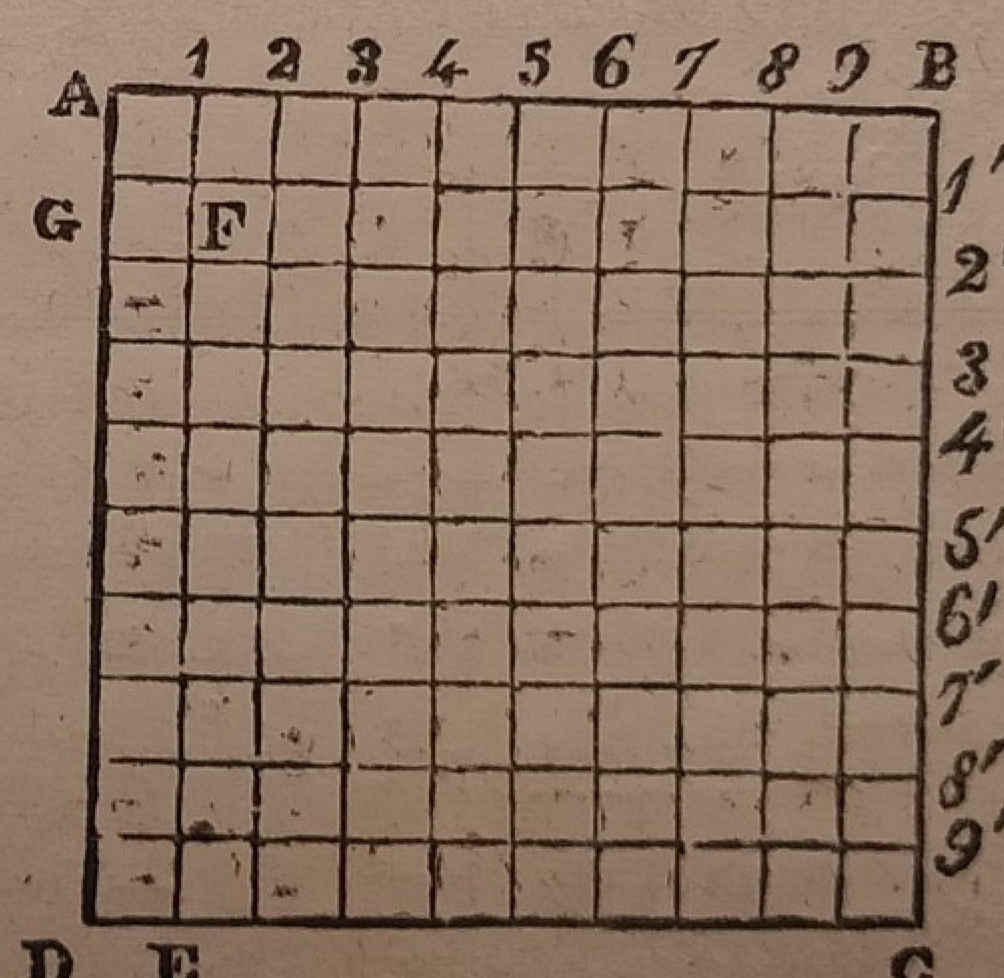
227. Nella scrittura delle misure lineari si seguono le stesse leggi, che valgono per quella dei numeri decimali, perchè anche qui un' unità di un ordine qualunque ne vale sempre dieci dell' ordine immediatamente inferiore. Così 10 *metri* e 35 *millimetri* si scriverà *m* 10,035. 7 *chilometri*, 4 *ettometri*, 5 *metri* e 2 *decimetri* si scriverà *km* 7,4052. Analogamente *Mm* 20,5043 si leggerà 20 *miriametri* e 5043 *metri*, oppure 20 *miriametri*, 5 *chilometri*, 4 *decametri* e 3 *metri*.

Mediante un semplice spostamento della virgola si può anche cambiare l' unità di misura, alla quale

una grandezza è riferita. Basta, infatti, per questo, trasportare la virgola di tanti posti verso destra o sinistra, quante unità vi sono nella potenza di 10, che indica quante volte la nuova misura è contenuta nell' antica, o quante volte l' antica è contenuta nella nuova. Così, per esempio, volendo ridurre *Mm* 7,3564 a *decametri* scriveremo *dam* 7356,4, perchè in un miriametro vi sono 1000 decametri; oppure, volendo ridurre *dam* 537,42 a *Chilometri*, scriveremo *km* 5,3742, perchè in un chilometro vi sono 100 decametri.

Misure di superficie

228. L' unità di misura per le superficie è, come abbiamo già accennato, il *metro quadrato*, cioè la superficie di un quadrato, che ha il lato lungo un metro. Esso si divide in 100 *decimetri quadrati;* infatti, se supponiamo che i due lati *AB* e *BC* sian divisi in 10 parti, cioè nei decimetri che contengono, conducendo per i punti di divisione 1, 2, 3.... del lato *AB* tante parallele ai lati *BC*, *AD* veniamo a dividere il metro quadrato in 10 strisce come *ADE*1, larghe tutte 1 decimetro. Ora, conducendo per i punti di divisione 1′, 2′, 3′.... del lato *BC* tante parallele ai lati *AB*, *CD*, ciascuna delle 10 strisce viene ad esser divisa in dieci piccoli quadrati, come *A*1*FG*, aventi ciascuno per lato 1 decimetro; quindi il numero totale di questi è



10×10 ossia 100. Per la stessa ragione in 1 decimetro quadrato sono 100 *centimetri quadrati*, e perciò in tutto il metro ve ne sono 100×100 ossia 10000. Ed analogamente in 1 centimetro quadrato vi sono 100 *millimetri quadrati*, ed in tutto il metro 100×10000 ossia 1000000.

Così un Decametro quadrato conterrà 100 metri quadrati, 1 Ettometro quadrato ne conterrà 10000, 1 Chilometro quadrato 1000000 ed 1 Miriametro quadrato 100000000. Quindi nelle misure di superficie una unità di misura di un ordine qualunque ne contiene 100 dell' ordine inferiore.

229. Nella misura dei terreni si prende per unità l'*ara*, che è un altro nome che si dà al *decametro quadrato;* dunque l'ara è 100 metri quadrati; non ha che un multiplo, l'*ettara*, che è 100 are, ossia un ettometro quadro, cioè 10000 metri quadrati; ed ha pure un solo sottomultiplo, cioè la *centiara*, che è la centesima parte dell'ara, ossia 1 metro quadrato.

Ecco la tavola di queste misure.

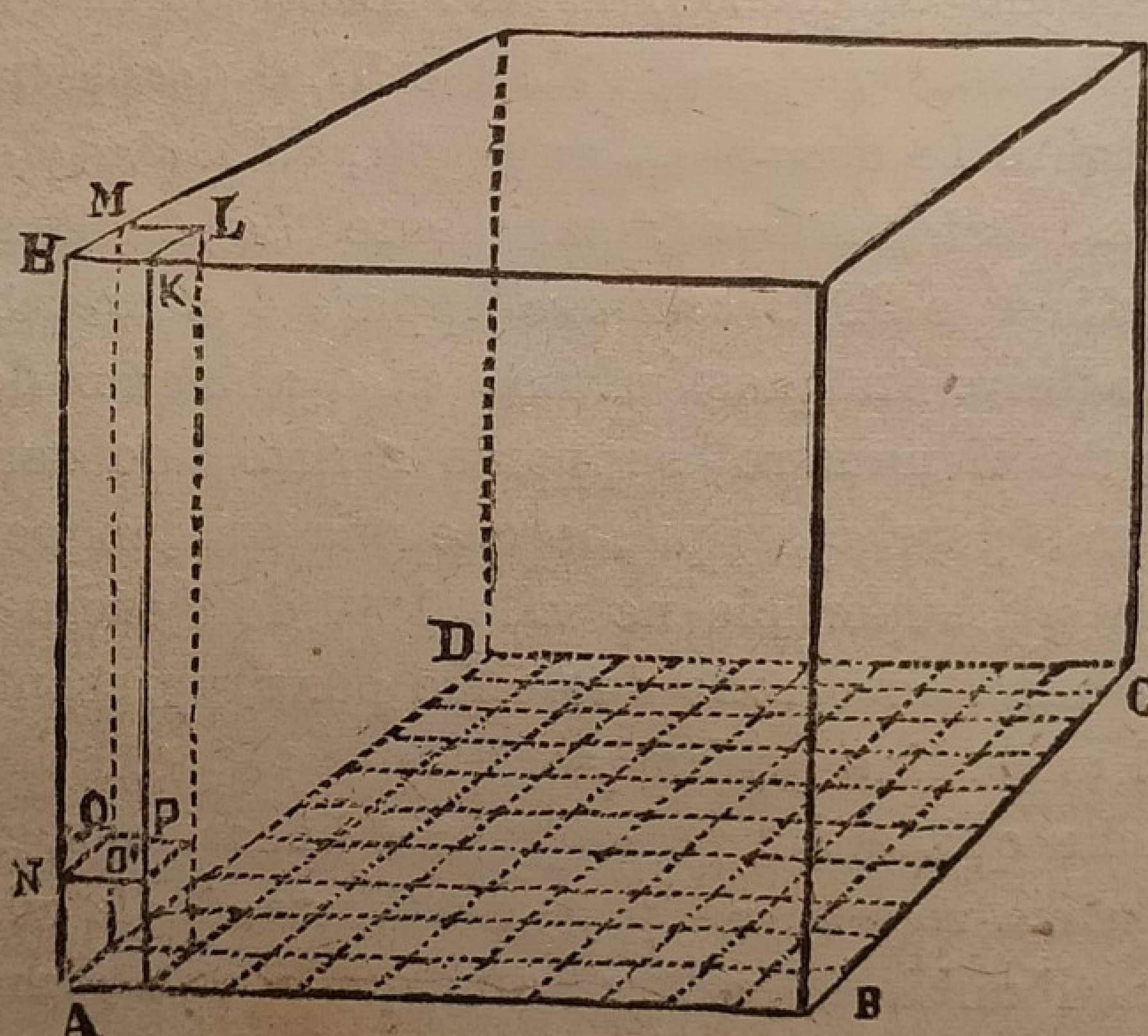
	NOMI	Simboli	VALORI	Osservazioni
Tutte di conto — Geografiche	Miriametro quadrato	Mm^2	100000000 metri quadri	Il Miriametro quadrato ed il Chilometro quadrato si dicono misure *geografiche*. L'Ettara, Ara e Centiara *agrarie*. Le misure di superficie sono tutte di conto, perchè la Geometria dà il modo di misurare le varie superficie, che si possono presentare, senza bisogno di riportarvi effettivamente la misura adottata.
Tutte di conto — Geografiche	Chilometro quadrato	km^2	10000000 »	
Tutte di conto — Agrarie	Ettometro quadrato o Ettara..........	hm^2 o ha	10000 »	
Tutte di conto — Agrarie	Decametro quadrato o Ara..............	dam^2 o a	100 »	
Tutte di conto — Agrarie	Metro quadrato o centiara.........	m^2 o ca		
Tutte di conto	Decimetro quadrato.	dm^2	$\frac{1}{100}$ di metro quadrato	
Tutte di conto	Centimetro quadrato	cm^2	$\frac{1}{10000}$ »	
Tutte di conto	Millimetro quadrato.	mm^2	$\frac{1}{1000000}$ »	

230. La scrittura dei numeri esprimenti misure di superficie presenta perfetta analogia con quella dei numeri decimali; basta soltanto osservare che un' unità di una specie qualunque vale 100 di quelle immediatamente inferiori, e quindi, se s' immagina la virgola posta dopo la cifra esprimente metri quadrati, occorrono due cifre per rappresentare i decimetri quadrati, quattro per i centimetri quadrati, sei per i millimetri quadrati ecc. dopo la virgola stessa. Così 300 *metri quadrati* e 475 *centimetri quadrati* si scriveranno m^2 300,0475; parimente 8 *ettare*, 12 *are* e 4 *centiare* si scriveranno *ha* 8,1204. Invece Dm^2 18,5726 si leggeranno *decametri quadrati* 18 e 5726 *decimetri quadrati*, oppure 18 *decametri quadrati*, 57 *metri quadrati* e 26 *decimetri quadrati;* parimente *ha* 4,304 si leggerà 4 *ettare* e 3040 *centiare* oppure 4 *ettare*, 30 *are* e 40 *centiare*. In quest' ultimo caso abbiamo dovuto, per leggere il numero, supporre scritto uno zero alla sua destra, perchè sappiamo che una qualunque unità di misura di superficie ne vale 100 dell' ordine inferiore, e quindi occorrono due cifre per rappresentare le unità di un ordine qualunque.

Anche qui, come nelle misure lineari e seguendo la medesima regola, si può, trasportando la virgola, cambiare l' unità di misura, alla quale una grandezza è riferita, avvertendo di effettuare il trasporto della virgola sempre di due in due posti. Così volendo convertire km^2 32,687042 in *ettometri quadrati* scriveremo hm^2 3268,7042; e volendoli ridurre a *decimetri quadrati* scriveremo dm^2 3268704200. Parimente per ridurre *ha* 325,547 a *chilometri quadrati* si scriverà km^2 3,25547.

Misure di volume

231. L'unità di misura per i volumi è, come sappiamo, il *metro cubo*, cioè un cubo avente lo spigolo lungo 1 metro. Esso si divide in 1000 *decimetri cubi:* infatti, se supponiamo la base $ABCD$, che è un metro quadrato, divisa in 100 decimetri quadrati, su ognuno di essi possiamo immaginare una colonna avente per base 1 decimetro quadrato ed alta 1 metro, come $AEFGHKLM$, e di queste colonne nel metro cubo ve



ne sono in tutte 100. Ora ognuna di queste si può dividere, (essendo alta 1 metro), in 10 piccoli cubi aventi per spigolo 1 decimetro, come $AEFGNOPQ$, dunque in tutto il metro di questi decimetri cubi ve ne son tante volte 10, quante sono le colonne, ossia 10×100, cioè 1000. Per la stessa ragione in un decimetro cubo vi sono 1000 centimetri cubi, e perciò nel metro cubo, che contiene 1000 decimetri cubi, vi sono 1000×1000

ossia 1000000 di *centimetri cubi*. E poichè in un centimetro cubo vi sono 1000 millimetri cubi, in tutto il metro cubo vi saranno 1000 $\times$ 1000000 ossia 1000000000 di *millimetri cubi*. Analogamente si vede che in 1 Decametro cubo vi sono 1000 metri cubi, in 1 Ettometro cubo 1000000, in un Chilometro cubo 1000000000 e via di seguito; ma queste ultime misure son poco usate. Da ciò che abbiam detto si deduce, che nelle misure di volume un'unità di misura di un ordine qualunque vale sempre 1000 unità dell'ordine immediatamente inferiore.

232. Il metro cubo prende il nome di *stero* quando serve come misura per le legna da ardere ed anche per la terra di scavo; questa misura non ha che un multiplo, il *Decastero*, ed un sottomultiplo, il *decistero*, che valgono respettivamente 10 metri cubi e la decima parte di 1 metro cubo, ossia 100 decimetri cubi.

Ecco il prospetto delle misure di volume.

	NOMI	Simboli	VALORI	Osservazioni
Raramente usate	Miriametro cubo.	Mm^3	1000000000000 di metri cubi	Anche nelle misure di volume non ne esistono delle effettive (eccettuato lo stero), perchè si può calcolare il volume di un corpo senza bisogno di effettivamente misurarlo.
	Chilometro cubo.	km^3	1000000000 »	
	Ettometro cubo..	hm^3	1000000 »	
Tutte di conto	Decametro cubo.	Dm^3 o dam^3	1000 »	
	Decastero	Ds o das	10 »	
	Metro cubo o stero	m^3 o s.		
	Decistero	ds	$\frac{1}{10}$ di metro cubo ossia 100 decimetri cubi	
	Decimetro cubo..	dm^3	$\frac{1}{1000}$ di metro cubo	
	Centimetro cubo.	cm^3	$\frac{1}{1000000}$ »	
	Millimetro cubo..	mm^3	$\frac{1}{1000000000}$ »	

233. Per scrivere o leggere i numeri esprimenti misure di volume basta rammentare quanto abbiamo ora detto, che cioè un unità di misura qualunque ne vale 1000 dell'ordine inferiore; se quindi s'immagina la virgola messa dopo le cifre esprimenti metri cubi, occorreranno dopo tre cifre per rappresentare i decimetri cubi, sei cifre per i centimetri cubi e nove per i millimetri cubi. Così per scrivere 18 *metri cubi* e 54326 *centimetri cubi* si scriverà m^3 18,054326; per scrivere 7 *Decametri cubi*, 19 *metri cubi* e 400 *decimetri cubi* si potrà scrivere Dm^3 7,0194, sottintendendo gli ultimi due zeri, cosa che può farsi, perchè la cifra 4 esprimendo, per le leggi che regolano la scrittura de' numeri decimali, 4 decimi di metro cubo, rappresenta 400 decimetri cubi. Analogamente il numero dam^3 40,10756 si leggerà 40 *Decametri cubi*, 107 *metri cubi* e 560 *decimetri cubi*, tenendo conto dello zero sottinteso. *Ds* 20,425 si leggerà 20 *Decasteri*, 4 *steri*, 2 *decisteri* e 50 *decimetri cubi*, oppure 20 *decasteri* e 4250 *decimetri cubi*.

Anche nelle misure di volume, colla stessa regola data per le misure lineari, si può col semplice trasporto della virgola cambiare l'unità di misura, avvertendo di effettuare lo spostamento sempre di tre posti in tre posti. Così, volendo convertire dam^3 30,4257 in *metri cubi* scriveremo m^3 30425,7; e, volendo convertire dm^3 5472,34 in *steri*, ossia metri cubi, scriveremo *s.* 5,47234.

Misure di Capacità

234. L'unità di misura di capacità è il decimetro cubo, che in questo caso prende il nome di *litro*, siccome la forma cubica del recipiente non sarebbe

comoda per gli usi pratici, è stata data invece a queste misure la forma cilindrica coll'altezza doppia del diametro della base. Sono in stagno, coccio o vetro per i liquidi, in legno (con armatura in ferro i più grandi) per gli aridi. Ecco il prospetto delle misure di capacità.

	NOMI	Simboli	VALORI	*Osservazioni*
Di conto ma poco usata	Chilolitro..........	kl	1000 litri	
Effettive	Doppio ettolitro...	.....	200 »	Le misure in stagno o bandone vanno dal doppio litro al centilitro; quelle in legno dal doppio ettolitro al decilitro.
	Ettolitro...........	hl	100 »	
	Mezzo ettolitro.....	.....	50 »	
	Doppio decalitro...	.....	20 »	
	Decalitro...........	.....	10 »	
	Mezzo decalitro....	dal o Dl	5 »	
	Doppio litro	.....	2 »	
	Litro..............	l		
	Mezzo litro.........	.....	$\frac{1}{2}$ litro	
	Doppio decilitro...	.....	$\frac{1}{5}$ di litro	
	Decilitro...........	dl	$\frac{1}{10}$ »	
	Mezzo decilitro	.....	$\frac{1}{20}$ »	
	Doppio centilitro ..	.....	$\frac{1}{50}$ »	
	Centilitro..........	cl	$\frac{1}{100}$ »	

235. I numeri esprimenti misure di capacità si scrivono e si leggono in modo perfettamente analogo a quelli esprimenti misure di lunghezza, perchè anche

qui dieci unità di misura di un ordine qualunque ne formano una dell' ordine immediatamente superiore. Così per scrivere 8 *ettolitri* e 35 *litri* si scriverà *hl.* 8,35. Analogamente *dal.* 12,304 si leggerà 12 *decalitri*, 3 *litri* e 4 *centilitri* oppure 12 *decalitri* e 304 *centilitri.*

Trasportando la virgola colla solita regola data per le misure lineari, si cambierà facilmente l' unità di misura; notiamo che anche qui lo spostamento della virgola si fa di un posto per ciascun ordine di unità; così volendo ridurre *hl* 34,1029 a *litri* non avremo che a scrivere *l.* 3410,29: per ridurre *l.* 2,05 a *decalitri* scriveremo *dal* 0,205.

Misure di peso

236. L' unità di misura per i pesi è il *grammo*, che rappresenta il peso, nel vuoto, di 1 centimetro cubo di acqua distillata, alla temperatura di 4° centigradi sopra zero. Si è preso il peso dell' acqua nel vuoto, o meglio nell' aria rarefatta per evitare la piccolissima perdita (*apparente*) di peso, che l' acqua, come ogni altro corpo, subisce nell' aria, secondo il principio di Archimede. Si è presa l' acqua distillata, perchè l' acqua comune contiene sempre delle sostanze disciolte che, a seconda della loro qualità e quantità, ne fanno variare il peso sotto un dato volume, mentre occorreva avere per unità di misura un peso costante. Così pure si è fissato di prendere il peso di un centimetro cubo di acqua distillata a 4° centigradi sopra 0, perchè, come sappiamo dalla Fisica, la densità dell' acqua è massima a questo punto, cioè diminuisce, se

la temperatura aumenta, come pure se la temperatura diminuisce al di là di questo limite; dicendo che la densità dell'acqua è massima a 4°, s'intende dire che a questa temperatura un determinato volume di acqua, come è appunto 1 centimetro cubo, pesa più che a qualunque temperatura superiore o inferiore, perchè contiene la maggiore quantità di materia, di cui è formata l'acqua.

Questi pesi son rappresentati da pezzi di ottone o di ferro di forma cilindrica o in lastre, o a tronco di piramide esagonale o quadrangolare. Eccone il prospetto nella tavola seguente:

	NOMI	Simboli	VALORI		Osservazioni
Di conto	Tonnellata	t	1000 kg. =	1000000 di grammi	I pesi dal grammo a 5 chilogrammi sono in ottone di forma cilindrica; dal $\frac{1}{2}$ ettogrammo al doppio miriagrammo sono anche in ghisa a forma di tronco di piramide esagonale o quadrata regolare. I tre più grossi non sono che in ferro. I pesi dal $\frac{1}{2}$ grammo al milligrammo sono di ottone argento, o platino (per le bilance di precisione) ed hanno la forma di piastrine quadrate smussate agli angoli in modo che prendono la forma ottagonale, ma non regolare.
	Quintale	q	100 kg. =	100000 »	
Effettive	Mezzo quintale	.....	50 kg. =	50000 »	
	Doppio miriagrammo	.....	20 kg. =	20000 »	
	Miriagrammo	Mg	10 kg. =	10000 »	
	Mezzo miriagrammo	.....	5 kg. =	5000 »	
	Doppio chilogrammo	.....	2 kg. =	2000 »	
	Chilogrammo	kg		1000 »	
	Mezzo chilogrammo	.....		500 »	
	Doppio ettogrammo	.....		200 »	
	Ettogrammo	hg		100 »	
	Mezzo ettogrammo	.....		50 »	
	Doppio decagrammo	.....		20 »	
	Decagrammo	Dg o dag		10 »	
	Mezzo decagrammo	.....		5 »	
	Doppio grammo	.....		2 »	
	Grammo	g			
	Mezzo grammo	.....	$\frac{1}{2}$ grammo		
	Doppio decigrammo	.....	$\frac{1}{5}$ di grammo		
	Decigrammo	dg	$\frac{1}{10}$ »		
	Mezzo decigrammo	.....	$\frac{1}{20}$ »		
	Doppio centigrammo	.....	$\frac{1}{50}$ »		
	Centigrammo	cg	$\frac{1}{100}$ »		
	Mezzo centigrammo	.....	$\frac{1}{200}$ »		
	Doppio milligrammo	.....	$\frac{1}{500}$ »		
	Milligrammo	mg	$\frac{1}{1000}$ »		

237. Per la scrittura, lettura e cambiamento di unità nei numeri esprimenti misure di peso valgono le stesse regole che per quelli esprimenti misure lineari. Per esempio 8 *tonnellate* e 307 *chilogrammi* si scriverà *t* 8,307; parimente *kg* 7,3025 si legge 7 *chilogrammi* 3 *ettogrammi*, 2 *grammi*, e 5 *decigrammi*; oppure 7 *chilogrammi* e 3025 *decigrammi*.

OSSERVAZIONE. Poichè un centimetro cubo d'acqua distillata pesa 1 grammo, ne viene che fra le misure di volume e quelle di peso esistono certe relazioni importanti, che è utile conoscere.

Se 1 *centimetro cubo* d'acqua distillata pesa 1 *grammo*, 1 *decimetro cubo*, ossia 1 *litro* d'acqua distillata peserà 1 *Chilogrammo;* 100 *decimetri cubi*, ossia 100 *litri*, ossia 1 *Ettolitro* peserà 100 kg., ossia 1 *Quintale*. 1000 *decimetri cubi*, ossia 1 *metro cubo*, peserà 1000 *Chilogrammi*, ossia 1 *Tonnellata*.

Misure di valore

238. L'unità di misura per i valori, ossia l'unità monetaria *di conto*, è *la lira italiana*, che è un pezzo di metallo in forma di disco, pesante 5 grammi, di cui $\frac{9}{10}$ sono d'argento ed $\frac{1}{10}$ di rame. Il metallo che costituisce la lira è dunque una *lega*, perchè diconsi leghe le mescolanze di due o più metalli; si preferisce la lega all'argento o all'oro puri, o come si dicono *fini*, perchè le leghe son più resistenti e quindi le monete si consumano meno coll'uso. Si chiama *titolo* di una lega il quoziente, che si ottiene dividendo per il peso di un pezzo qualunque di metallo il peso del metallo

fino in esso contenuto; quindi la lira italiana *di conto* è al titolo di $\frac{9}{10}$ o di 0,900, perchè il titolo si esprime ordinariamente in millesimi. Diciamo la lira italiana di conto, perchè quella *effettiva*, e com' essa tutte le monete di argento effettive, fatta eccezione dalla moneta da 5 lire, hanno il titolo più basso di 0,835, cioè contengono $\frac{835}{1000}$ di argento fino e $\frac{165}{1000}$ di rame. Questo ha disposto la legge, perchè, se avessero il titolo voluto, sarebbero accettate in commercio nei pagamenti all' estero e potrebbe darsi il caso che mancasse la *moneta divisionaria* (cioè di piccolo valore) per il minuto commercio interno. Vi son poi monete *d' oro* al titolo di 0,900, e *di bronzo*, composte di $\frac{960}{1000}$ di rame e $\frac{40}{1000}$ di stagno.

239. Si chiama *taglio* o *piede* delle monete il numero di pezzi di una data unità di moneta, che si può coniare con un chilogrammo di oro o argento monetato, cioè con un chilogrammo di lega. *Tolleranza* è il leggero errore in più o in meno, che la legge ammette sul peso o sul titolo delle monete, oltrepassato il quale la moneta non può aver corso. Dicesi *valore* d' una moneta il prezzo del metallo, di cui è formata; valore *reale* o *intrinseco* è quello del solo metallo fino contenuto in essa; valore *legale* o *estrinseco* o *di tariffa* è quello fissato dalla legge, in ragione del costo del metallo fino contenuto nella moneta, aumentato delle spese di coniazione, che diconsi *diritto di conio*. Il valore di un chilogrammo de' metalli preziosi ed il diritto di conio son fissati dalla legge come appresso.

Metalli	Valore reale di un chilogrammo	Diritto di conio	Valore legale di un chilogrammo
Oro fino	L. 3437	L. 7,444	L. 3444,444
» monetato a $\frac{9}{10}$	» 3093,30	» 6,70	» 3100
Argento fino............	» 220,50	» 1,722	» 222,222
» monetato a $\frac{9}{10}$.	» 198,45	» 1,55	» 200

Si vede di qui che l'oro monetato vale a parità di peso quindici volte e mezzo l'argento; infatti 1 chilogrammo d'oro monetato vale 3100 lire ed 1 chilogrammo d'argento L. 200 e $\frac{3100}{200} = 15\,\frac{1}{2}$.

240. **Ecco la tabella delle monete effettive del Regno, con tutte le relative indicazioni.**

METALLO	VALORE		DIAMETRO	TITOLO	PESO	TOLLERANZA			TAGLIO O PIEDE
	legale	reale				sul titolo	Sul peso: in millesimi del peso	Sul peso: Totale sulla pezza	
	Pezzi da L.		mm.	mill.	gr.			mg.	
Oro	100	L. 99,78367	35	900	32,2580	2	1	32,258	31
	50	49,89184	28	»	16,1290	2	1	16,129	62
	20	19,95673	21	»	6,4516	2	2	12,903	155
	10	9,97837	19	»	3,2258	2	2	6,451	310
	5	4,98918	17	»	1,6129	2	3	4,839	620
Argento	5	4,96125	37	900	25	3	3	75	40
	2	1,84118	27	835	10	3	5	50	100
	1	0,92059	23	»	5	3	5	25	200
	0,50	0,46029	18	»	2,50	3	7	17,50	400
	0,20	0,18412	16	»	1	3	10	10	1000
Bronzo	0,10		30	960	10		10	100	100
	0,05		25	»	5		10	50	200
	0,02		20	»	2		15	30	500
	0,01		15	»	1		15	15	1000

Calcolo delle misure metriche

241. La valutazione delle grandezze mediante le nuove misure dando sempre luogo a numeri interi seguiti da frazioni decimali, i calcoli relativi alle grandezze espresse a questo modo si faranno sempre sopra numeri decimali. È questo uno dei principali vantaggi del nuovo sistema.

Esempi. 1° Sommare 25 are, 2 ettare e 79 are, e 3 ettare, 2 are, 35 centiare.

Riducendo tutto ad are si ha:

$$
\begin{array}{lr}
\text{a.} & 25 \\
» & 279 \\
» & 302,35 \\
\hline
» & 606,35
\end{array}
$$

La somma è 6 ettare, 6 are, 35 centiare.

2° Una cassa piena pesa 78 chilogrammi e 78 decagrammi; la stessa cassa vuota pesa 5 chilogrammi, 3 decagrammi, 1 grammo. Qual è il peso della mercanzia che conteneva?

$$
\begin{array}{lr}
\text{kg.} & 78,78 \\
» & 5,031 \\
\hline
» & 73,749.
\end{array}
$$

Sottraendo da kg. 78,78, peso della cassa piena, kg. 5,031, peso della cassa vuota, si trova kg. 73,749 cioè 73 chilogrammi e 749 grammi.

3° Il peso di un ettolitro di carbone è kg. 82,7; un sacco di carbone contiene 1 ettolitro e 42 litri: qual è il peso di 3227 sacchi?

Per avere il volume del carbone bisogna moltiplicare hl. 1,42 per 3227

$$\text{hl. } 1{,}42 \times 3227 = \text{hl. } 4582{,}34.$$

Si trova per prodotto 4582 ettolitri e 34 litri. Il peso di un ettolitro essendo kg. 82,7, per avere il peso di un numero qualunque di ettolitri, bisogna moltiplicare 82,7 per questo numero

$$\text{kg. } 82{,}7 \times \text{hl. } 4582{,}34 = \text{kg. } 378959{,}518.$$

Il peso richiesto è dunque kg. 378959,518, cioè 378959 chilogrammi e 518 grammi.

Osservazione. Quando la moltiplicazione si effettua fra numeri che rappresentano lunghezze come 42 metri e 56 metri, il prodotto 2352 rappresenta metri quadrati, cioè 23 are e 52 metri quadrati. Se si dovesse moltiplicare 42 metri per 56 metri e per 12 metri, il prodotto 28224 rappresenterebbe metri cubi, cioè 28 decametri cubi e 224 metri cubi. Questo resulta da proprietà, che si dimostrano nella Geometria.

4° Un vetturale ha trasportato 753 steri di legname in un carro, che contiene 2 steri e 4 decisteri. Quanti viaggi ha egli fatto?

È evidente che, per avere il numero dei viaggi, bisogna dividere 753 per 2,4 o (194) 7530 per 24:

$$\begin{array}{r|l} 7540 & 24 \\ \cline{2-2} 33 & 313 \\ 90 & \\ 18 & \end{array}$$

Il numero dei viaggi è 313. Se i dati fossero rigorosi, occorrerebbe un ultimo viaggio per portare 18 decisteri. Ma gli elementi della questione non comportano una simile precisione nella risposta.

Esercizî

I. Sotto un egual volume, l' acqua pesa 773 volte più dell' aria. Si domanda il peso di *l.* 825,371 d' aria.

II. Si domanda il peso d' aria spostato da *kg.* 1563 di rame, sapendo che questo metallo pesa 8,167 volte più dell' acqua, sotto lo stesso volume.

III. Quanti centimetri cubi sono in una massa di oro puro, che costa L. 753, sapendo che l' oro pesa, a egual volume, 19,5 volte più dell' acqua, e vale, a peso eguale, 15,5 volte più dell' argento?

IV. Qual è il peso di *l.* 32,732 d' acqua a 30°, sapendo che il volume dell' acqua a 30° è eguale al prodotto del suo volume a 4° per la frazione 1,00437?

V. Una miniera di carbone dà in 15 giorni 1294 balle di carbone, ciascuna delle quali contiene *hl.* 11,25. La spesa giornaliera è di L. 475,75. Quanto costerà un ettolitro di carbone?

VI. Per trasportare il carbone mediante una strada ferrata si pagano L. 0,097 per tonnellata e per chilometro. Si paga inoltre un diritto fisso di L. 2,12 per vagone contenente *hl.* 3240. A quanto verrebbero *hl.* 28275,65, comprati al prezzo di L. 2,85 l' ettolitro, e trasportati mediante la strada ferrata a *Mm.* 15,97? L' ettolitro di carbone pesa 82 chilogrammi.

VII. I dati essendo gli stessi di quelli del quesito precedente, si suppone che il capo di una fabbrica paghi annualmente alla strada ferrata 2580 lire per trasportare i suoi carboni ad una distanza di *Mm.* 2,375: calcolare il numero degli ettolitri trasportati.

VIII. Il minerale d' una fabbrica di piombo è stato ridotto, mediante preparazioni meccaniche, a contenere 0,794 del suo peso in piombo; la fabbrica possiede 4 fornelli, ciascuno dei quali può trattare 1295 chilogrammi di minerale in $12^{ore},35'$: la perdita in piombo è di 11 per 100

del metallo contenuto nel minerale. Quanti giorni bisogna lavorare ogni anno, affinchè la produzione annuale si elevi a 16000 quintali di piombo?

IX. Adottando i dati del quesito precedente e supponendo che il piombo fabbricato contenga 0,00032 di argento e che 0,02 di questo argento si perda nell' operazione, mediante la quale si estrae dal piombo, quanti fornelli a piombo abbisognano perchè la fabbrica produca annualmente la quantità di argento contenuta in un milione di franchi della nostra moneta? (Si suppone che il numero delle giornate di lavoro dei fornelli sia quello che risulta dal calcolo precedente).

X. Un terreno dell' estensione di dam^2 $24\frac{4}{5}$ è coltivato a papaveri: questa pianta dà per ogni ettara 20 *hl* di seme che pesa *kg* 6,8 al *dal*. Il seme dà il 40 % del suo peso d' olio, che vale L. 98,50 al quintale. Quanto rende quel terreno?

XI. Un prato dell' estensione di *ha* 7 e 32 *ca* produce *q*. 49,56 di fieno per ogni ettara; le spese ammontano a L. 0,85 al dam^2. Qual è il valore del prato, se il fieno si vende a L. 49,50 per ogni miriagrammo ed il prodotto netto è $\frac{1}{27}$ del valore cercato?

XII. Il vino contenuto in 2 botti costa L. 1260,81, valutandolo a L. 0,45 al litro. Una delle due botti contiene *dal* 147 e 34 *dl*. Si vuol sapere la capacità di ciascuna botte espressa in metri cubi.

XIII. La polvere pirica infiammandosi produce un gas, che ha un volume 4000 volte maggiore di quello della polvere. Qual' è il volume del gas prodotto dall' accensione di un barile, che contiene un metro cubo e 43 centimetri cubi di polvere?

XIV. In una fabbrica ove erano 25 forni sono stati consumati in una settimana 997 *steri* e 5 *decisteri* di legna a L. 0,007 al dm^3. Si vuol sapere la spesa giornaliera per ciascun forno.

XV. In un caffè sono 25 becchi a gas, che stanno ac-

cesi in media ore $4\frac{1}{2}$ al giorno. Se 1 m^3 di gas costa L. 0,38 ed ogni beccuccio consuma litri 120 di gas all'ora, quanto si spende all'anno per l'illuminazione di quel caffè?

XVI. L'acqua congelandosi aumenta $\frac{73}{20}$ % del suo volume; quale doventerà il volume di 250 *litri* d'acqua quando sia congelata?

XVII. Un pallone di vetro pieno d'aria pesa *g* 1714, 8 e contiene *l.* 12,7; facendovi il vuoto, cioè estraendone l'aria con una macchina pneumatica, pesa *hg* 16,9829. Si vuol sapere qual'è il peso di 1 *litro* e quello di 1 m^3 d'aria.

XVIII. Una botte piena di vino pesa *q.* 15,798 e la botte vuota pesa *kg* 57,24. Ogni litro di vino pesando *hg* 9,76 ed ogni decalitro costando L. 4,75, si vuol sapere il prezzo del vino contenuto nella botte.

XIX. Un'ettara di terreno produce *t* 52,152 di barbabietole e *q* 21,73 di barbabietole producono 1 ettolitro di alcool. Quanto renderanno al lordo *a* 645 di terreno coltivato a barbabietole, se 1 decalitro di alcool si vende a L. 12,50?

XX. Con una certa somma in monete d'oro, che contenevano in tutte *g* 806,45 di rame si è comprato un terreno a L. $4\frac{4}{9}$ al metro quadrato. Qual'è l'estensione di quel terreno in metri quadrati?

XXI. Trovare il peso della moneta da 20 lire, partendo dal dato che il valore dell'oro è quindici volte e mezzo quello di un peso eguale di argento.

XXII. Il valore del rame, nella moneta di rame, essendo quaranta volte minore di quello di un peso eguale d'argento, trovare con questo dato il peso della moneta da dieci centesimi.

XXIII. Tenendo conto che 27 monete d'argento da 5 lire, poste l'una accanto all'altra, fanno la lunghezza di un metro, calcolare il diametro delle monete di argento da 5 lire.

XXIV. 2 monete da una lira e 2 da due lire poste l'una accanto all'altra fanno un decimetro. Il diametro della moneta da una lira è $\frac{23}{27}$ di quello della moneta da due lire. Qual'è il diametre di ciascuna?

XXV. Per un lavoro ordinato ad un orefice si è stabilito il prezzo di L. 5,60 per ogni grammo d'oro puro compresa la fattura. Gli si fanno fare tre oggetti; il peso del primo è di *g* 75 al titolo di 0,940; quello del secondo è *g* 216,8 al titolo di 0,760; e quello del terzo *g* 98,4 al titolo di 0,850. Si conviene di pagare l'orefice dandogli tanto oro fino: quanto ne dovrà avere?

CAPITOLO XI

NUMERI COMPLESSI

242. Diconsi *numeri complessi* quei numeri che rappresentano misure, nelle quali i multipli e sottomultipli dell'unità principale non si succedono secondo il sistema decimale, cioè non vanno di dieci in dieci, ma secondo una legge qualunque. Danno luogo dunque a numeri complessi tutte le misure antiche, le misure moderne degli Stati, che non hanno introdotto il sistema metrico e, fra noi, la *misura del tempo* e quella *della circonferenza*.

Accenneremo qui quanto si riferisce a queste ultime ed alle antiche misure toscane; per le altre misure antiche o moderne rimandiamo alle tavole, che sono in fine del libro e ad altre più estese, che si trovano in commercio e che si dicono *Tavole di ragguaglio dei pesi e misure*, che danno la serie delle misure delle varie nazioni con la loro parità in misure metriche.

Misura del tempo

243. L'unità di misura di tempo è il *giorno solare*, ossia l'intervallo di tempo che corre fra due passaggi successivi del sole al meridiano di uno stesso luogo. Si

divide in 24 *ore*, l'ora in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, e s'indicano queste misure coi simboli:

giorno	ora	minuto	secondo
g	*h*	*m*	*s*

I multipli del giorno sono il *mese* di 30 o 31 giorno, l'*anno* di 12 mesi, il *lustro* di 5 anni, il *secolo* di 100 anni. L'anno è il tempo che impiega la terra a compiere un giro di rivoluzione intorno al sole ed è eguale a 365 giorni, 5 ore e 49 minuti circa. Trascurando le 5 ore e i 49 minuti, si ha l'anno civile di 365 giorni; ogni 4 anni la parte di tempo trascurata annualmente dà circa un giorno e perciò, per non rimanere indietro nel conto, si calcola ogni 4 anni un anno di 366 giorni, che dicesi *bisestile.* In commercio l'anno si computa sempre di 360 giorni, con i mesi di 30 giorni ciascuno.

Misura della circonferenza

244. La circonferenza è divisa in 360 parti dette *gradi;* ogni grado in 60 parti dette *minuti primi;* ognuno di questi in altre 60 parti dette *minuti secondi.* Questa divisione della circonferenza dicesi *sessagesimale.* Gli astronomi francesi proposero, dopo la riforma delle misure e l'impianto del sistema metrico, la divisione *centesimale*, nella quale la circonferenza si immagina divisa in 400 parti dette *gradi*, il grado in 100 *minuti primi*, il minuto primo in 100 *secondi*, ma questo sistema è stato ben presto abbandonato, perchè poco utile per le formule astronomiche ed i calcoli relativi.

Misure antiche toscane

245. L'unità di lunghezza era il *braccio:* esso si divideva in 20 *soldi*, e il soldo in 12 *denari.* Vi era pure la *canna agrimensoria* di 5 braccia.

Per le misure itinerarie si faceva uso del *miglio*, equivalente a braccia $2833 \frac{133}{1000}$.

L'unità di superficie era generalmente il *braccio quadro*, che conteneva 400 *soldi quadri*, di 144 *denari quadri* ciascuno.

Per le misure agrarie v'era il *quadrato:* esso si divideva in 10 *tavole;* la tavola si divideva in 18 *pertiche;* la pertica in 10 *deche*, di 10 *braccia quadre* ciascuna. In tempi anteriori nelle provincie fiorentina e pisana, facevasi uso per le misure agrarie dello *stioro.* Lo stioro fiorentino si componeva di 12 *panora;* il panoro di 12 *pugnora;* ed il pugnoro di 12 *braccia quadre* e 12 diciassettesimi di braccio. Lo stioro pisano componevasi di 66 *pertiche quadre;* e ciascuna di queste conteneva 25 braccia quadre.

L'unità di misura pei volumi era generalmente il *braccio cubo*, che si componeva di 800 *soldi cubi;* il soldo cubo poi si componeva di 1728 *denari cubi.*

Pel legname da ardere v'era la *catasta*, la quale si componeva di 24 *braccia cube*, oppure, secondo l'uso del commercio, di sole 18.

Pel legname da costruzione v'era il *traino;* che si divideva in 12 *bracciola*, ed il bracciolo in 12 *once.*

L'unità di capacità pei liquidi era il *barile;* il quale, trattandosi di vino, conteneva libbre 133 e once 4 d'umido, e componevasi di 20 fiaschi; se d'olio, conteneva libbre 88 d'umido, e componevasi di fiaschi 16.

L'unità di capacità per gli aridi era lo *staio*, e si divideva in 4 *quarti;* il quarto in 8 *mezzette;* la mezzetta in 2 *quartucci:* 3 staia formavano un *sacco*, e 8 sacca un *moggio*.

L'unità monetaria era la *lira*, o più modernamente il *fiorino*. La lira si divideva in 20 *soldi* di 12 *denari* ciascuno; il fiorino si divideva in 100 *quattrini* o centesimi. V'erano pure unità monetarie di conto, come lo *scudo fiorentino* equivalente a lire 7, e la *pezza* di Livorno, che si usava in commercio, equivalente a lire $5\frac{3}{4}$, e che si divideva in 20 *soldi;* il soldo poi si divideva in 12 *denari*, come nelle divisioni e suddivisioni della lira.

L'unità di peso era la *libbra;* essa si divideva in 12 parti chiamate *once;* l'oncia si divideva in 24 *denari*, il denaro in 24 *grani*.

Calcolo dei numeri complessi

246. Un numero complesso esprimente una misura qualunque come, per esempio, 15 *tese*, 7 *pollici*, 11 *linee*, (la tesa è un antica misura lineare francese, che si divide in 6 *piedi;* il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*), contiene diverse classi di unità di grado in grado più piccole, derivate le une dalle altre secondo una suddivisione convenuta; l'unità principale dicesi unità *della prima specie*, e l'ultima, o la più piccola, *dell' ultima specie*; la prima si può anche chiamare senz'altro *unità principale*. Su queste misure si possono fare certe riduzioni, importanti per il calcolo delle misure stesse, che ora esporremo.

Riduzione di un numero complesso ad incomplesso e reciprocamente

247. *Ridurre un numero complesso ad incomplesso* vuol dire ridurlo tutto ad unità dell' *infima* specie. Abbiasi ad esempio *g.* 8 *h.* 10 *m.* 40 da ridursi a numero incomplesso; poichè in un giorno sono 24 ore, 8 giorni sono $8 \times 24 = 192$ ore: e, poichè nel numero dato vi sono 10 ore, avremo in tutto $192 + 10 = 202$ ore. Ma un' ora si compone di 60 minuti, dunque in 202 ore vi sono $202 \times 60 = 12120$ minuti, che aggiunti ai 40, che son nel numero dato, fanno in tutto 12160 minuti. Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

Per ridurre un numero complesso ad incomplesso si riducono le unità della prima specie ad unità dell'ordine inferiore, moltiplicandole per il numero di unità della seconda specie contenute in una unità della prima, e si aggiungono al prodotto ottenuto le unità della seconda specie contenute nel numero dato. Si riduce allo stesso modo il resultato ottenuto ad unità della terza specie, e così di seguito, fino a che si ottengano unità dell' infima specie.

Il calcolo si dispone come appresso, tenendo conto dell' esempio precedente:

$$
\begin{array}{rr}
g. & 8 \times 24 \\
\hline
 & 192 \\
 & 10 \\
\hline
h. & 202 \times 60 \\
\hline
 & 12120 \\
 & 40 \\
\hline
m. & 12160
\end{array}
$$

248. *Ridurre un numero incomplesso a complesso* significa trovare le unità dei diversi ordini, che vi son contenute. Sia dato, per esempio, 12342 *grani* di *libbra toscana*; poichè per fare un *denaro*, unità dell'ordine superiore, occorrono 24 grani, nel numero dato vi sono tanti denari, quante volte 24 è contenuto in 12342, ossia 514, ed avanzano 6 grani. In 514 denari vi sono tante *once*, unità dell'ordine superiore, quante volte 24 sta in 514, perchè 1 oncia è 24 denari; dividendo 514 per 24, si hanno 21 once ed avanzano 10 denari. Siccome 1 *libbra* è 12 once, in 21 once vi son tante libbre quante volte 12 è contenuto in 21, ossia 1 libbra, e restano 9 *once*. Dimodochè il numero dato è *lib. tosc.* 1 *once* 9 *den.* 10 *gr.* 6.

Il calcolo si dispone nel modo appresso indicato·

$$\begin{array}{r|l}
gr.\ 12342 & 24 \\ \cline{2-2}
34 & \begin{array}{r|l} den.\ 514 & 24 \\ \cline{2-2} 34 & \begin{array}{r|l} once\ 21 & 12 \\ \cline{2-2} 9 & lib.\ tosc.\ 1 \end{array} \\ 10 & \end{array} \\
102 & \\
6 &
\end{array}$$

quindi *gr.* 212342 = *lib. tos.* 1 *once* 9 *den.* 10 *gr.* 6.

Possiamo dunque enunciare questa regola: *Per ridurre un numero incomplesso a complesso si divide il numero dato per il numero di unità da esso rappresentate, necessario per formare un' unità della specie superiore; il quoziente esprime unità della specie superiore ed il resto unità della specie considerata. Si divide il quoziente per il numero di unità da esso rappresentate necessarie per formare un' unità della specie superiore; il quoziente esprime unità della specie superiore ed il resto unità dello stesso ordine di quelle del*

quoziente. Così si prosegue l'operazione fino a che si ottengano al quoziente unità della prima specie. Questo quoziente ed i resti successivi sono le diverse parti del numero cercato.

Riduzione dei numeri complessi in frazione ordinaria o decimale dell'unità principale

249. Il calcolo delle misure complesse si può ridurre a quello dei numeri ordinarii o a quello dei numeri decimali, convertendo i numeri espressi nei sistemi rispettivi in frazioni ordinarie o decimali dell'unità principale. Comecchè questo metodo non sia preferibile in generale, pur nondimeno è utile far conoscere come possa effettuarsi questa riduzione.

1° *Ridurre in frazione ordinaria* $7^{tese}\ 4^{piedi}\ 9^{pollici}\ 6^{linee}$.

Poichè 1 linea è $\frac{1}{12}$ di pollice, 6 linee sono $\frac{6}{12}$ o $\frac{1}{2}$ di pollice; quindi 9 pollici e 6 linee equivalgono a pollici $9\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$ di pollice. Ma 1 pollice è $\frac{1}{12}$ di piede, dunque $\frac{19}{2}$ di pollice sono $\frac{19}{2\times 12}$ o $\frac{19}{24}$ di piede; per conseguenza 4 piedi, 9 pollici, 6 linee, corrispondono a piedi $4\frac{19}{24}$ o a $\frac{115}{24}$ di piede; ma il piede è $\frac{1}{6}$ di tesa, dunque $\frac{115}{24}$ di piede sono $\frac{115}{24\times 6}$ o $\frac{115}{144}$ di tesa. Quindi 1 tesa, 4 piedi, 9 pollici, 6 linee, equivalgono a tese $7\frac{115}{144}$ o a $\frac{1123}{144}$ di tesa.

Quindi possiamo dire che *per ridurre un numero complesso in frazione ordinaria dell'unità principale si esprimono le unità dell'ultima specie in frazione dell'unità dell'ordine precedente e si aggiungono alle unità di quest'ordine, che sono nel numero dato. Si riduce il numero misto ottenuto a frazione impropria e si esprime poi questa in frazione dell'unità dell'ordine immediatamente superiore, aggiungendola quindi all'unità di quest'ordine. Così di seguito fino a che si sia ottenuto una frazione dell'unità principale.*

Il calcolo si dispone come è qui indicato:

tese	*piedi*	*pollici*	*linee*
7	4	9	6
$7\frac{115}{144}$	$4\frac{19}{24}$	$9\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$ *di pollice*
$\frac{1123}{144}$ *di tesa*	$\frac{115}{24}$ *di piede*	$\frac{19}{2}$ *di pollice*	$\frac{1}{2}$
	$\frac{115}{144}$ *di tesa*	$\frac{19}{24}$ *di piede*	

Osservazione. La riduzione richiesta può effettuarsi ancora in altro modo. 7 tese sono eguali a 42 piedi quindi; 7 tese e 4 piedi equivalgono a 46 piedi, cioè a 46×12, o a 552 pollici; dunque 7 tese, 4 piedi, 9 pollici pareggiano 561 pollici, cioè 561×12 o 6732 linee; e per conseguenza 7 tese, 4 piedi, 9 pollici, 6 linee sono eguali a 6738 linee. Ma 1 linea è $\frac{1}{12}$ di pollice, $\frac{1}{144}$ di piede, $\frac{1}{864}$ di tesa; dunque il numero proposto equivale a $\frac{6738}{864}$ ossia a $\frac{1123}{144}$ di tesa.

Dunque secondo questo metodo, *per ridurre un numero complesso in frazione ordinaria dell' unità principale, si riduce prima in numero incomplesso ed il resultato è il numeratore della frazione cercata; gli si dà poi per denominatore il numero delle unità dell' infima specie, che è contenuto in un' unità principale.*

Il primo metodo è però in generale preferibile al secondo perchè dà subito un resultato più semplice.

250. *Ridurre in frazione decimale* $9^{\textit{lire tosc.}}$ $12^{\textit{soldi}}$ $8^{\textit{denari}}$.

Poichè 1 denaro è $\frac{1}{12}$ di soldo, 8 denari sono $\frac{8}{12}$ ossia 0,666.... di soldo; quindi 12 soldi e 8 denari corrispondono a soldi 12,666.... Per ridurre questo numero in frazione decimale di lira, bisognerà dividerlo per 20 e si avrà 0,6333....; quindi 9 lire, 12 soldi e 8 denari sono equivalenti a lire 9,6333.... Il calcolo si dispone così

```
 80 | 12
  80|-----------
    | 0,666
    | 12,666....  | 20
         66       |----------
          66      | 0,633....
                  | 9,633.....
```

Evidentemente la regola da seguirsi è identica alla prima del problema precedente (**249**) purchè si avverta di fare uso delle frazioni decimali, in luogo che delle ordinarie.

Le questioni reciproche alle precedenti si risolvono con eguale facilità.

251. *Ridurre la frazione ordinaria* $\frac{10211}{432}$ *di libbra toscana in libbre e parti di libbra.*

Dividendo il numeratore per il denominatore si ha 23 per quoziente e 275 per resto; dunque la frazione proposta è uguale a 23 libbre e $\frac{275}{432}$ di libbra. Ma una libbra è 12 once, dunque $\frac{275}{432}$ di libbra sono eguali a $\frac{275 \times 12}{432}$ di oncia $= \frac{3300}{432}$ di oncia, cioè a 7 once e $\frac{276}{432}$ di oncia. Un' oncia è 24 denari, quindi $\frac{276}{432}$ di oncia sono eguali a $\frac{276 \times 24}{36}$ di denaro, ovvero a 15 denari e $\frac{144}{432}$ di denaro. Un denaro è 24 grani, quindi $\frac{144}{432}$ di denaro è $\frac{144 \times 24}{432}$ di grano, ovvero 8 grani. Dunque la frazione ordinaria $\frac{10211}{432}$ di libbra equivale a **23 *libbre*, 7 *once*, 15 *denari*, 8 *grani*.**

Da quanto abbiamo veduto consegue, che *per ridurre una frazione ordinaria di unità principale di un numero complesso in numero complesso equivalente, si comincia col dividere il numeratore per il denominatore; il quoziente esprime unità della prima specie. Si riduce il resto ad unità della seconda specie, moltiplicandolo per il numero di queste contenuto in un' unità della prima specie, e si divide il resultato per il denominatore della frazione data: il quoziente esprime unità di seconda specie. Si riduce al solito modo il resto in unità della terza specie, si divide per il denominatore, e così si prosegue l' operazione fino a che si giunga ad ottenere al quoziente unità dell' infima specie.*

La disposizione del calcolo è la seguente, servendosi dell' esempio ora svolto

```
      10211   | 432
       1571   |-----------------------------------------
        275×12| 23lib. tosc. 7once 15den. 8grani
       ----
        550
      275
      ----
on.   3300
        276×24
      -----
      1104
      552
      ----
den.  6624
      2304
       144×24
      ----
       576
      288
      ----
gr.   3456
         0
```

252. ***Ridurre la frazione decimale 8^{tese},7892 in tese, e parti di tesa.***

Si moltiplica 0,7892 per **6**, cioè per il numero di piedi contenuti in una tesa, e si ottiene 4,7352, cioè 4 piedi più la frazione decimale 0,7352 di piede; ora, poichè 1 piede è 12 pollici, la frazione trovata di piede è 0,7352 di 12 pollici; perciò si moltiplica 0,7352 per 12 e si ottiene 8,8224, cioè 8 pollici e 0,8224 di pollice; e, poichè 1 pollice è 12 linee, 0,8224 di pollice sono 0,8224 di 12 linee e perciò, moltiplicando 0,8224 per 12, si ha 9,8688 che rappresenta 9 linee ed una fra-

zione di linea. Quindi la frazione decimale $8^{tese},7892$ equivale a $8^{tese}\ 4^{piedi}\ 8^{pollici}\ 10^{linee}$ circa.

Dunque, *per ridurre una frazione decimale di unità principale in numero complesso, si moltiplica la parte decimale del numero dato per il numero di unità della seconda specie contenute in un' unità principale; la parte intera del prodotto esprime unità della seconda specie. Si moltiplica poi la parte decimale del prodotto per il numero di unità della terza specie contenuto in una di seconda specie, e la parte intera del prodotto esprime unità della terza specie. Così si prosegue l'operazione fino a che si giunga ad ottenere le unità dell' infima specie.*

Il calcolo si dispone, come è appresso indicato:

$$
\begin{array}{rl}
\textit{tese} & 8{,}7892 \times 6 \\ \cline{2-2}
\textit{piedi} & 4{,}7352 \times 12 \\ \cline{2-2}
 & 14704 \\
 & 7352 \\ \cline{2-2}
\textit{pollici} & 8{,}8224 \times 12 \\ \cline{2-2}
 & 16448 \\
 & 8224 \\ \cline{2-2}
\textit{linee} & 9{,}8688
\end{array}
$$

avvertendo nelle successive moltiplicazioni di non tener mai conto della parte intera del moltiplicando, ma di moltiplicare solo la parte decimale.

Addizione

253. *Per addizionare più numeri complessi si scrivono uno sotto all' altro, situando nella medesima co-*

lonna le unità della stessa specie; si addizionano quindi separatamente le unità delle diverse specie, cominciando da destra, cioè da quelle dell'infima specie. Da ciascuna somma parziale si estraggono le unità della specie superiore, che vi possono essere contenute, e si riportano alla somma delle unità corrispondenti, scrivendo le unità che restano della specie su cui abbiamo operato.

Esempio.

brac. tosc.	*soldi*	*denari*
8	4	9
6	10	11
4	19	6
19	15	2

La somma dei denari dà 26 denari, cioè 2 soldi più 2 denari, perchè 1 soldo è 12 denari; si scrivono 2 denari e i 2 soldi si aggiungono alla somma dei soldi, la quale viene in questo modo 35 soldi. Ma 35 soldi, poichè 20 soldi danno una lira, formano 1 lira e 15 soldi: si scrivono questi alla somma dei soldi e si riporta 1 lira, che forma con quelle già esistenti nei numeri dati 19 lire.

Sottrazione

254*. *Si dispongono i numeri proposti come nell'addizione, e si comincia l'operazione dall'ultima specie, sottraendo dalle unità di ciascuna specie del diminuendo le unità della specie corrispondente del diminutore. Quando il numero delle unità di una specie del diminutore è maggiore di quello da cui deve togliersi, si aggiunge a quest'ultimo un'unità presa dalla specie superiore, dopo averla ridotta in unità della specie*

inferiore, sulla quale si eseguisce la sottrazione, e si diminuisce poi di un'unità il numero delle unità della specie superiore nel diminuendo.

Esempj.

lire tosc.	*soldi*	*denari*
12	14	8
7	19	11
4	14	9

braccia cube	*soldi cubi*	*denari cubi*
95	60	96
21	500	624
73	7559	1200

Nella prima sottrazione si ragiona a questo modo: da 8 denari non possiamo togliere 11 denari, quindi agli 8 denari aggiungeremo 1 soldo, cioè 12 denari, togliendo questo soldo dai 14 contenuti nella colonna dei soldi, e diremo: 12 denari e 8 denari sono 20 denari dai quali togliendo 11 denari, avremo 9 per resto, che scriveremo sotto la colonna dei denari. Dai 13 soldi rimanenti non si possono sottrarre 19 soldi; perciò prenderemo 1 lira, cioè 20 soldi, dalle 12 della colonna delle lire, e diremo; 20 soldi più 13 sono 33 soldi, dai quali sottraendo 19 soldi, avremo 14 per resto, che scriveremo sotto la colonna dei soldi. Finalmente, sottraendo 7 lire da 11 lire, avremo 4 lire, che scriveremo sotto la colonna delle lire.

La sottrazione di braccia cube, soldi cubi e denari cubi si eseguisce coi medesimi principii, avendo presente che un braccio cubo contiene $20 \times 20 \times 20 = 8000$ soldi cubici; un soldo cubo contiene $12 \times 12 \times 12 = 1728$ denari cubici.

Moltiplicazione

255*. Abbiamo veduto (**29, 176**) che moltiplicare una quantità per un numero significa ripetere questa

quantità tante volte quante unità sono nel moltiplicatore, ovvero prendere tante parti di questa quantità, supposta divisa in parti eguali, quante sono indicate dal moltiplicatore. Da ciò risulta che *nella moltiplicazione dei numeri concreti il prodotto sarà sempre dello stesso genere del moltiplicando; ed il moltiplicatore figurerà da numero astratto*. Così, per esempio, sapendo che un metro di panno costa 18 franchi e 56 centesimi, il costo di 7 metri dello stesso panno sarà dato dal prodotto 18,56 per 7, ed il prodotto 129,92 esprimerà franchi come il moltiplicando 18,56.

256. La moltiplicazione può effettuarsi in più modi: 1° *riducendo in frazione ordinaria o decimale della unità di prima specie il moltiplicando ed il moltiplicatore, eseguendo la moltiplicazione come si è praticato pei numeri astratti*, e *convertendo il prodotto ottenuto in unità del moltiplicando e parti di unità*. Supponiamo, per esempio, che si voglia calcolare il costo di 6 braccia, 9 soldi, 4 denari di un panno, che si è comprato a 16 lire, 18 soldi, 8 denari al braccio.

Braccia 6, 9 soldi, 4 denari, equivalgono a $\frac{97}{15}$ di braccio, e lire 16, 18 soldi, 8 denari, equivalgono a $\frac{254}{15}$ di lira; quindi si moltiplicherà $\frac{254}{15}$ per $\frac{97}{15}$ e si otterrà il prodotto $109\frac{113}{225}$, che deve esprimer lire; e riducendo in parti di lira la frazione ordinaria $\frac{113}{225}$, il costo domandato sarà 109 lire, 10 soldi, $\frac{8}{15}$ di denaro.

Saremmo giunti allo stesso risultato, se i due fattori si fossero ridotti in frazioni decimali.

257. Supponiamo ora di voler moltiplicare 5 *braccia*, 8 *soldi*, 4 *denari* per 7 *braccia*, 6 *soldi*, 8 *denari;* il prodotto esprimerà evidentemente *braccia quadrate*, *soldi quadrati*, *denari quadrati*. Il metodo indicato si applica con vantaggio al prodotto di misure lineari per misure lineari della stessa specie. Infatti il primo numero equivale a $\frac{65}{12}$ di braccio, e il secondo a $\frac{22}{3}$ di braccio: il prodotto di questi due numeri è $\frac{65 \times 22}{12 \times 3} =$

$$= \frac{65 \times 11}{6 \times 3} = \frac{715}{18} \text{ di } b.\,q.$$

Riducendo questa frazione in numero complesso equivalente, avremo (**251**), rammentando che 1 braccio quadro è 400 soldi quadri ed 1 soldo quadro 144 denari quadri,

braccia quadre	715	18
	175	*b.q.* 39 *s.q.* 288 *d.q.* 128
	13 × 400	
soldi quadri	5200	
	160	
	160	
	16 × 144	
	864	
	144	
denari quadri	2304	
	50	
	144	

ed il prodotto cercato è 39 *braccia quadre*, 288 *soldi quadri* e 128 *denari quadri*.

Se i numeri da moltiplicare fra loro fossero 5 *braccia*, 8 *soldi*, 4 *denari;* 7 *braccia*, 6 *soldi*, 8 *denari;*

3 *braccia*, 4 *soldi*, 8 *denari*, si farebbe il prodotto dei due primi fattori, e il risultato 39 b.q. 288 s.q. 128 d.q. si moltiplicherebbe per $3^b\ 4^s\ 8^d$: il risultato esprimerebbe evidentemente misure cubiche. Per eseguire questo secondo prodotto si procederà in un modo affatto simile al precedente; $39^{bq}\ 288^{sq}\ 128^{dq}$ sono $\frac{715}{18}$ di bq. Il numero $3^b\ 4^s\ 8^d$ corrisponde a $\frac{97}{30}$ di braccio. Il prodotto dei numeri proposti è quindi $\frac{715 \times 97}{18 \times 30} = \frac{143 \times 97}{18 \times 6} = \frac{13871}{108}$ di *braccio cubo.*

Riducendo questa frazione di braccio cubo (**251**) a numero complesso avremo, rammentando che 1 braccio cubo contiene 8000 soldi cubi e il soldo cubo 1728 denari cubi,

braccia cube	13871	108
	307	*b.c.* 128 *s.c.* 3481 *d.c.* 832
	911	
	47×8000	
soldi cubi	376000	
	520	
	880	
	160	
	52×1728	
	3456	
	8640	
denari cubi	89856	
	345	
	216	

ed il prodotto cercato è 128 *braccia cube*, 3481 *soldi cubi* ed 832 *denari cubi.*

258*. 2° Il secondo metodo, che chiamasi di *prendere in parti*, è in generale preferibile ai precedenti ed è particolarmente molto adoperato nell'astronomia pratica. Supponiamo, come primo esempio, di volere moltiplicare il numero complesso 20 lire, 14 soldi, 8 denari per 8 braccia. Il moltiplicando essendo composto di più parti, bisognerà *moltiplicare ciascuna di esse separatamente per il moltiplicatore e sommare i prodotti ottenuti. Per eseguire queste moltiplicazioni parziali si considera ogni parte decomposta in parti più piccole, ma tali che ciascuna sia contenuta un esatto numero di volte nella parte precedente, cioè che sia, come suol dirsi, una parte aliquota della medesima.* L'esempio seguente dichiarerà meglio il metodo.

	20^{lire}	14^{soldi}	8^{denari}
	8^{braccia}		
	160^{lire}		
per 10 *soldi*....	4		
per 4 *soldi*....	1	12^{soldi}	
per 8 *denari*...		5	4^{denari}
Totale...	165^{lire}	17^{soldi}	4^{denari}

Dopo aver moltiplicato 20 *lire* per 8 *braccia*, per moltiplicare 8 *braccia* per 14 *soldi* si è considerato il moltiplicando 14 decomposto in 10 più 4, e si è detto: poichè il prodotto di 8 *braccia* per 1 *lira* dà 8 *lire*, il prodotto di 8 *braccia* per 10 *soldi*, che sono metà di una lira, dovrà dare la metà di 8 *lire*, cioè 4 *lire;* ed il prodotto di 8 *braccia* per 4 *soldi*, che sono la quinta parte di una lira, dovrà dare la quinta parte di 8 lire, cioè $1^{l}\ 12^{s}$. Per formare il prodotto per 8 *denari* si è detto: se il prodotto di 8 *braccia* per 4 *soldi* è 1 *lira*

e 12 *soldi*, il prodotto di 8 *braccia* per 8 *denari*, che sono la sesta parte di 4 *soldi*, deve dare la sesta parte 1 *lira* e 12 *soldi*, cioè $5^s\ 4^d$. Si è fatta poi la somma dei prodotti parziali ottenuti.

Come secondo esempio, proponiamoci di moltiplicare lo stesso numero complesso $20^{\text{lire}}\ 14^{\text{soldi}}\ 8^{\text{denari}}$ per l'altro numero complesso $8^{\text{braccia}}\ 6^{\text{soldi}}\ 3^{\text{denari}}$. L'operazione procederà nel modo seguente:

	20^{lire}	14^{soldi}	8^{denari}
	8^{braccia}	6^{soldi}	3^{denari}
	160^l		
per 10 *soldi...*	4		
per 4 *soldi...*	1	12^s	
per 8 *denari..*		5	4^d
per 4 *soldi...*	4	2	$11\frac{1}{5}$
per 2 *soldi..*	2	1	$5\frac{3}{5}$
per 3 *denari..*		5	$2\frac{1}{5}$
Prodotto totale	172^l	6^s	11^d

La moltiplicazione per 8 *braccia* si fa come sopra; poi il moltiplicatore 6 *soldi* si decompone in 4 *soldi* e 2 *soldi*, e si dice: poichè il prodotto di 1 *braccio* per $20^l\ 14^s\ 8^d$ dà $20^l\ 14^s\ 8^d$, il prodotto di 4 *soldi*, che sono il quinto di un *braccio*, per lo stesso numero, darà la quinta parte di $20^l\ 24^s\ 8^d$, cioè $4^l\ 2^s\ 11^d\frac{1}{5}$; ed il prodotto per 2 *soldi*, metà di 4 soldi, di $20^l\ 14^s\ 8^d$, darà la metà di $4^l\ 2^s\ 11^d\frac{1}{5}$, cioè $2^l\ 1^s\ 5^d\frac{3}{5}$. Osservando adesso che 2 *soldi* equivalgono a 24 *denari*, si vede che 3^d ottava parte di 24 *denari* sono l'ottavo di 2 *soldi*,

e quindi il prodotto di 3 *denari* per $20^l\ 14^s\ 8^d$ è l'ottavo di $2^l\ 1^s\ 5^d\frac{3}{5}$, cioè $5^s\ 2^d\frac{1}{5}$. Si fa poi la somma dei prodotti parziali ottenuti.

Divisione

259. Bisogna considerare due casi:

1° *Quando il dividendo e il divisore sono dello stesso genere;*

2° *Quando il dividendo e il divisore sono di diverso genere.*

Primo caso. Il primo caso ha luogo, per esempio nel seguente quesito: Sapendosi che una libbra di una certa mercanzia costa $34^{lire}\ 12^{soldi}\ 3^{denari}$, si domanda quante libbre di una tal mercanzia potranno comprarsi con $1528^{lire}\ 14^{soldi}\ 6^{denari}$. Infatti è chiaro che, per risolvere questa questione, bisogna vedere quante volte $34^l\ 12^s\ 6^d$ sono contenute in $1528^l\ 14^s\ 6^d$, e si vede che il quoziente dev'essere di genere diverso dal dividendo e dal divisore. *Per eseguire la divisione in questo caso bisogna ridurre i due numeri dati* (**249**) *in frazione ordinaria di unità della prima specie ed esprimere il quoziente in forma di numero astratto o di numero concreto, secondo che esige il quesito, che ha dato motivo al calcolo.*

$1528^l\ 14^s\ 6^d$ sono eguali a $\frac{61149}{40}$ di *lira* $\qquad$ $34^l\ 12^s\ 3^d$ sono eguali a $\frac{2769}{80}$ di *lira*

$$\frac{61149}{40} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{80} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{2769} \text{ di } libbra$$

Riducendo questa frazione in numero complesso (251), si ottiene:

122298^{libbre}	2769
11538	$44^{\text{libbre}}\ 2^{\text{once}}\ 0^{\text{denari}}\ 1^{\text{grano}}\ \frac{229}{293}$
462×12	
924	
462	
5544^{once}	
6×24	
$144^{\text{denari}} \times 24$	
576	
288	
3456^{grani}	
687	

260. *La divisione, nel caso che si considera, si eseguisce spesso più facilmente riducendo i numeri dati in unità dell' ultima specie, e dividendoli uno per l'altro, esprimendo il quoziente in forma di numero astratto o concreto, a norma della quistione che ha dato motivo al calcolo.* Ecco un esempio di questo processo.

Si domanda quante lire ci vogliono per comprare 98 braccia, 18 soldi, 8 denari di panno, sapendo che con una lira si comprano 2 braccia, 8 soldi, 4 denari di questo panno.

L'operazione si dispone nel seguente modo:

$$
\begin{array}{rrl}
 & \underline{98 \times 20} & \qquad \underline{2 \times 20} \\
 & 1960 & \qquad 40 \\
 & \underline{18} & \qquad \underline{8} \\
\textit{soldi} & \underline{1978} \times 12 & \qquad \underline{48} \times 12 \\
 & 3956 & \qquad 96 \\
 & \underline{1978} & \qquad \underline{48} \\
 & 23736 & \qquad 576 \\
 & \underline{8} & \qquad \underline{4} \\
\textit{dividendo, denari} & 23744 & \qquad \mid \underline{580 \; \textit{denari, divisore}} \\
 & \underline{544 \times 20} & \qquad 40^{\text{lire}}\, 18^{\text{soldi}}\, 9^{\text{den.}} \frac{3}{29} \\
 & 10880^{\text{soldi}} & \\
 & 5080 & \\
 & \underline{440 \times 12} & \\
 & 5280^{\text{denari}} & \\
 & \mathbf{60} & \\
\end{array}
$$

261. *Secondo caso.* In questo caso il divisore è, o può considerarsi come un numero astratto, per cui il quoziente deve essere dello stesso genere del dividendo, e *la divisione può sempre ridursi a quella di un numero concreto per un numero astratto.*

Esempio I. Una somma di $448^{\text{lire}}\ 10^{\text{soldi}}\ 3^{\text{denari}}$ deve distribuirsi a 24 persone; si domanda quanto spetterà a ciascuna? Qui trattandosi di decomporre il numero proposto in 24 parti eguali, il divisore è realmente un numero astratto, e *la divisione si eseguirà come sui numeri interi, ma per parti, dividendo successivamente ciascuna parte del dividendo per il divisore, formando di ogni resto un nuovo dividendo, riducendolo in unità della specie seguente ed aggiungendovi le unità della*

stessa specie contenute nel numero proposto, e così continuando sino all' ultima specie.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 448^{\text{lire}}\ 10^{\text{soldi}}\ 3^{\text{denari}} & 24 \\
\cline{3-3}
 & 208 & 18^{\text{lire}}\ 13^{\text{soldi}}\ 9^{\text{denari}}\frac{1}{8} \\
\textit{1° resto.....} & 16 \times 20 & \\
\cline{2-2}
 & 320 & \\
 & 10 & \\
\cline{2-2}
\textit{2° dividendo.} & 330^{\text{soldi}} & \\
 & 90 & \\
\textit{2° resto....} & 18 \times 12 & \\
\cline{2-2}
 & 216 & \\
 & 3 & \\
\cline{2-2}
\textit{3° dividendo.} & 219^{\text{denari}} & \\
\textit{ultimo resto.} & 3 &
\end{array}
$$

Si sono divise 448 *lire* per 24, e si è ottenuto il quoziente 18 *lire* ed il resto 16 *lire;* questo resto si è moltiplicato per 20 e si sono ottenuti 320 *soldi*, aggiungendo ai quali i 10 *soldi* del numero proposto si è avuto il 2° dividendo, 330 *soldi*, che, diviso per 24, ha dato per quoziente 13 *soldi* e per resto 18 *soldi.* Questo secondo resto si è ridotto in denari, moltiplicandolo per 12, al prodotto 216 *denari* si sono aggiunti i 3 *denari* del numero proposto, e si è ottenuto il 3° dividendo 219 *denari*, che, diviso per 24, ha dato per quoziente $9\frac{3}{24}$ ossia $9\frac{1}{8}$ *denari.*

Esempio II. Con 1350 *lire*, 14 *soldi*, 10 *denari* si sono comprate 58 *braccia*, 6 *soldi*, 8 *denari* di panno, si domanda quanto si è pagato per ogni braccio. Cambiando il divisore $58^{\text{braccia}}\ 6^{\text{soldi}}\ 8^{\text{denari}}$ in frazione or-

dinaria, si avrà $\frac{175}{3}$, e l' operazione sarà ridotta a dividere la proposta somma di lire, soldi e denari, per la frazione $\frac{175}{3}$, cioè a moltiplicarla per 3 e dividerla per 175. La moltiplicazione si eseguirà con le regole già date, e la divisione col metodo usato nell' esempio precedente.

262. Passiamo adesso a dire qualche cosa della divisione delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche. È chiaro in prima che il quoziente sarà un numero astratto, se si tratta di dividere unità quadrate per unità quadrate, o unità cube per unità cube; esprimerà unità lineari, se dovranno dividersi unità cube per unità quadrate o unità quadrate per unità lineari. Ciò posto, supponiamo si voglia dividere $324^{\text{braccia cube}}$ $391^{\text{soldi cubi}}$ $756^{\text{denari cubi}}$ per 18^{braccia} 4^{soldi} 6^{denari}.

$$324^{\text{braccia cube}}\ 391^{\text{soldi cubi}}\ 756^{\text{denari cubi}} \qquad \Big| \qquad 18^{\text{braccia}}\ 4^{\text{soldi}}\ 6^{\text{danari}}$$

$$324\,\frac{6263}{128000} \qquad 391\,\frac{7}{16} \qquad \frac{756}{1728}\ \frac{7}{16} \qquad \Big| \qquad 18\,\frac{9}{40} \qquad 4\,\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\frac{41478263}{128050} \qquad \frac{6263}{16}\,\text{sc} = \frac{6263}{16 \times 8000}\,\text{bc} \qquad \Big| \qquad \frac{9}{2}\,\text{s} = \frac{9}{2 \times 20}\,\text{b}$$

$$\frac{41478263}{128000} : \frac{2332800}{128000} \qquad \Big| \qquad \frac{729}{40} = \frac{729 \times 3200}{40 \times 3200} = \frac{2332800}{128000}$$

$$\begin{array}{r|l}
41478263 & 2332800 \\ \cline{2-2}
18150263 & 17^{\text{bq}}\ 312^{\text{sq}}\ 39^{\text{dq}}\ \frac{78}{81}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1820663 & 5832 \\ \cline{2-2}
7106 & 312^{\text{sq}} \\
12743 & \\
1079 \times 3 &
\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1820663 \times \frac{400}{2332800} = \frac{182066}{5832}$$

$$\begin{array}{r|l}
3237 & 81 \\ \cline{2-2}
807 & 39^{\text{dq}}\ \frac{78}{81} \\
78 &
\end{array} \quad \ldots\ 1079 \times \frac{144}{5832} = 1079 \times \frac{3}{81} = \frac{3237}{81}$$

Abbiamo ridotto i numeri dati in frazioni ordinarie dello stesso denominatore ed eseguita la divisione sui numeratori, e, poichè il quoziente doveva esprimere braccia quadrate, abbiamo considerato il dividendo come un numero di braccia quadrate e il divisore come numero astratto. Trovato il primo resto della divisione esprimente braccia quadrate, abbiamo ridotto in soldi quadrati la frazione di braccia quadrate $\frac{1820663}{2332800}$, e, per far ciò, invece di moltiplicare il numeratore per 400, giovandoci di una proposizione già dimostrata, abbiamo diviso il denominatore per questo numero. Lo stesso procedimento abbiamo seguito per ridurre i soldi quadrati in denari quadrati.

Conversione delle misure complesse in decimali e viceversa

263. Si presenta frequentemente nella pratica, specialmente trattandosi di unità monetarie, per le quali molti Stati non hanno adottato il sistema metrico decimale, di dover ridurre misure complesse in misura decimale, o viceversa. Consideriamo dunque i due casi.

Ridurre una misura complessa, per esempio, 3 lire sterline, 8 scellini, 6 pence *in misura decimale, cioè in lire italiane.*

Riducendo il numero complesso dato in frazione ordinaria dell' unità principale (**249**), sapendo dalle tavole di ragguaglio che 1 *sterlina* si divide in 20 *scellini* e 1 *scellino* in 12 *pence*, si ottiene $\frac{137}{40}$ di lira sterlina. Ora, poichè le tavole di ragguaglio ci dicono che

1 lira sterlina vale circa L. 25,22, il numero complesso dato sarà eguale a $\frac{137}{40}$ di L. 25,22, ossia

$$\text{L. } 25{,}22 \times \frac{137}{40} = \text{L. } 86{,}38 \text{ circa.}$$

Possiamo dunque dire che *per ridurre una misura complessa in misura decimale, si riduce il numero complesso a frazione ordinaria dell'unità di prima specie, e poi si moltiplica per questa frazione il valore, che ha l'unità di prima specie in misura decimale.*

264. *Ridurre una misura decimale, per esempio* m. 8,57, *in misura complessa, per esempio, in braccia toscane.*

Dalle tavole di ragguaglio si sa che 1 braccio toscano vale circa m. 0,584; dunque la misura data equivarrà ad una frazione di braccio equivalente a $\frac{8{,}57}{0{,}584}$ ossia, riducendo interi i due termini, eguale a $\frac{8570}{584} = \frac{4285}{292}$. Basterà quindi ridurre la frazione $\frac{4285}{292}$ di *braccio* in *braccia, soldi e denari* ed avremo (251) per resultato 14 *braccia toscane*, 13 *soldi*, 5 $\frac{67}{73}$ *denari.*

Quindi abbiamo questa regola: *per ridurre una misura decimale in misura complessa, si divide la misura data per quanto vale in misura decimale l'unità di prima specie della misura, che si vuol trovare. Si riducono interi i termini della frazione ottenuta, che esprime una frazione dell'unità di prima specie della misura complessa cercata, e si riduce questa frazione in numero complesso.*

In fine a questo libro sono le tavole di ragguaglio,

che danno le principali misure antiche italiane ed estere, colle loro suddivisioni, ed il loro valore in misura decimale.

Esercizi

I. Che frazione di anno rappresentano 7 *anni*, 2 *mesi*, 14 *giorni* e 5 *ore?*

II. Ridurre in misura complessa $\frac{147}{35}$ di *grado.*

III. Ridurre in misura complessa *libbre toscane* 8,7021.

IV. In un contratto di vecchia data si trova che ad un terreno lungo 146 *braccia toscane*, 8 *soldi*, 10 *denari*, fu aggiunto un altro pezzo di terreno lungo 84 *braccia toscane*, 18 *soldi*, 8 *denari*, ed in seguito ne fu tolto un pezzo lungo 45 *braccia toscane*, 16 *soldi*, 9 *denari*. Si domanda quanto era lungo in misura antica il terreno rimasto.

V. In un vecchio chirografo di famiglia una persona trova che suo padre ha pagato, in 18 rate, una certa somma a 38 *lire toscane*, 6 *soldi*, 8 *denari* per rata. Vuol trovare a quanto ammontava la somma totale pagata dal padre.

VI. Un vecchio, che non conosce il sistema metrico decimale, fissa un operaio per un lavoro di premura a 7 *lire toscane*, 4 *soldi* e 6 *denari* al giorno. Quanto dovrà pagargli per 5 *mesi*, 4 *giorni* e 4 *ore* di lavoro?

VII. Molti anni fa si pagarono 38 *braccia toscane* di damasco di seta 520 *lire toscane*, 10 *soldi* e 8 *denari*. Quanto costava al braccio quella stoffa?

VIII. Un tale sa che suo padre, vecchio impiegato, guadagnava 10250 *lire toscane*, 14 *soldi* e 10 *denari* in 3 *anni*, 7 *mesi* e 10 *giorni*. Qual era lo stipendio annuo del padre di questa persona?

IX. Abbiamo comprato merci dall'Inghilterra per il valore di 24 *lire sterline*, 10 *scellini* e 10 *pence*. Quanto dobbiamo spendere in lire italiane per il pagamento di questa merce, sapendo che una lira sterlina si divide in 20 scellini, di 12 pence ciascuno e che il valore della lira sterlina in lire italiane è L. 25,22 circa?

X. Si vuol sapere a quanto corrisponderebbero 2000 *lire italiane* in moneta antica romana, conoscendo che 1 *aureo* romano valeva L. 20,38 e che si divideva in 25 *denari*, ciascuno dei quali era suddiviso in 4 *sesterzi*.

CAPITOLO XII

TEORIA DEI QUADRATI E DELLE RADICI QUADRATE

Teoremi sui quadrati

265. Teorema I. *Il quadrato della somma di due numeri è eguale al quadrato del primo, più due volte il prodotto del primo per il secondo, più il quadrato del secondo.*

Sia $(a+b)$ la somma proposta. Fare il quadrato di questa somma significa moltiplicare $a+b$ per $a+b$; e per questo (**47**) bisogna moltiplicare ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore e addizionare i resultati; si ha dunque

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) =$$
$$= a \times a + b \times a + a \times b + b \times b,$$

cioè a dire

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

Osservazione. *Il quadrato di un numero composto di decine e di unità è eguale al quadrato delle decine, più due volte il prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità.*

Indicando con d la cifra delle decine e con u la cifra delle unità del numero dato, esso sarà rappre-

sentato da $d \times 10 + u$ e il suo quadrato sarà, per il teorema precedente,

$$(d \times 10 + u)^2 = d^2 \times 100 + 2 \times d \times 10 \times u + u^2,$$

che può scriversi:

$$(d \times 10 + u)^2 = d^2 \times 100 + (2 \times d \times u) \times 10 + u^2,$$

relazione che ci mostra che il quadrato delle decine, d^2, dà per resultato centinaia, il doppio prodotto delle decine per le unità, $2 \times d \times u$, dà per resultato decine, ed il quadrato delle unità, u^2, dà per resultato unità.

266. Teorema II. *La differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi è eguale al doppio del numero più piccolo, aumentato di un'unità.*

Se s'indicano, infatti, questi due numeri, che per ipotesi sono consecutivi, con a ed $a+1$ avremo (**265**)

$$(a+1)^2 = a^2 + 2 \times a + 1$$

e quindi

$$(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2 \times a + 1 - a^2 = 2 \times a + 1,$$

come volevamo dimostrare.

267. Teorema III. *Il quadrato di una potenza si ottiene moltiplicando per 2 l'esponente della potenza.*

Infatti

$$(a^5)^2 = a^5 \times a^5 = a^{5+5} = a^{5 \times 2} = a^{10}$$

268. Teorema IV. *Il quadrato di un prodotto è eguale al prodotto dei quadrati dei fattori.*

Sia $a \times b \times c \times d$ un prodotto qualunque; formarne il quadrato significa moltiplicare $a \times b \times c \times d$

per $a \times b \times c \times d$; il resultato di questa moltiplicazione è (**43**) il prodotto

$$a \times b \times c \times d \times a \times b \times c \times d;$$

ma al prodotto di due fattori si può sostituire il loro prodotto effettuato, quindi il prodotto precedente può scriversi sotto la forma:

$$a^2 \times b^2 \times c^2 \times d^2,$$

come si voleva provare.

269. Osservazione. Se alcuni fattori sono potenze, per elevarle a quadrato basterà raddoppiare i loro esponenti. Debbasi, per esempio, formare il quadrato di $a^5 \times b^3 \times c$ avremo per resultato (**268**)

$$(a^5)^2 \times (b^3)^2 \times c^2$$

e quindi (**267**)

$$a^{10} \times b^6 \times c^2.$$

270. Teorema V. *Il quadrato di un numero intero non può terminare per nessuna delle cifre* 2, 3, 7 *e* 8.

Quando si moltiplica un numero intero per sè stesso, le unità del prodotto provengono dal prodotto delle unità del moltiplicando per quelle del moltiplicatore, quindi, poichè facendo il quadrato di un numero si moltiplica per se stesso, la cifra delle unità del quadrato proviene dal quadrato della cifra delle unità del numero dato.

Ora, qualunque sia questa cifra delle unità, il suo quadrato è: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, e non è, per conseguenza, terminato da niuna delle cifre 2, 3, 7 o 8.

271. Osservazione. I numeri terminati da 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, hanno i loro quadrati terminati

rispettivamente da 0, 1, 4, 9, 6, 5, 9, 4 o 1; se dunque un quadrato termina con 0 o con 5, il numero corrispondente terminerà pure al modo stesso, ma, in qualunque altro caso, conosciuta l'ultima cifra del quadrato, quella del numero stesso può avere due soli valori; così i quadrati che terminano con 1, 4, 9, 6 provengono rispettivamente da numeri che terminano con 1 o 9, 2 o 8, 3 o 7, 4 o 6.

272. Teorema VI. *Il quadrato di un numero intero non può terminare con un numero impari di zeri.*

Affinchè il quadrato di un numero termini con zeri, è necessario (**271**) che il numero stesso termini almeno con uno zero. Questo numero si può dunque rappresentare, indicando con A la parte costituita dalle cifre significative, con $A \times 10^n$, A essendo un numero intero non terminato da uno zero, ed n il numero degli zeri che lo seguono; n può anche essere eguale a 1. Il quadrato di questo numero è $A^2 \times 10^{2n}$ e termina evidentemente con $2n$ zeri, cioè con un numero pari di zeri, come si voleva dimostrare.

273. Teorema VII. *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un numero intero sia il quadrato di un altro numero intero, è che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari.*

1° Questa condizione è necessaria, giacchè il quadrato di un numero risoluto in fattori primi, si forma raddoppiando gli esponenti di questi fattori, i quali per conseguenza diventano tutti pari. Così inalzando al quadrato il numero $2^5 \times 5^2 \times 7$ si ha (**269**) $3^{10} \times 5^4 \times 7^2$, in cui tutti i fattori primi hanno esponenti pari.

2° Questa condizione è sufficiente, giacchè, se essa è sodisfatta, scrivendo il prodotto degli stessi fattori primi, dando a ciascuno di essi per esponente il quoziente della divisione per 2 dell'esponente con cui com-

pariscono nel numero, si ottiene un nuovo numero, che elevato a quadrato riproduce il numero proposto.

Così, dato il numero $2^6 \times 3^4 \times 5^2$, si trova subito l'altro $2^3 \times 3^2 \times 5$, che elevato a quadrato riproduce il numero dato.

274. Osservazione. Un numero intero, che ammette un divisore primo p, senza essere divisibile pel suo quadrato p^2, non può essere un quadrato; giacchè decomponendolo in fattori primi, il fattore p vi entrerebbe evidentemente alla prima potenza e per conseguenza con un esponente dispari.

Per esempio, un quadrato non può essere divisibile per 2 senza esserlo per 4; non per 3 senza esserlo per 9; non per 5 senza esserlo per 25.

275. Teorema VIII. *Il quadrato di una frazione irriducibile è un'altra frazione irriducibile, avente per termini i quadrati dei due termini della frazione data.*

Sia $\frac{a}{b}$ una frazione, che supporremo ridotta alla sua più semplice espressione; il suo quadrato è evidentemente $\frac{a^2}{b^2}$:

infatti $$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ora, a essendo primo con b, a^2 è primo con b^2 (**136**); e quindi, a^2 essendo primo con b^2, $\frac{a^2}{b^2}$ è pure irriducibile. E, poichè i suoi due termini sono quadrati, se ne deduce che il quadrato di una frazione, ridotto alla sua più semplice espressione, ha sempre per termini dei quadrati e di più non può esser mai eguale ad un numero intero.

Definizione della radice quadrata

276. Quando un numero A è il quadrato di un altro numero B, si dice che B è la *radice quadrata* di A, e si scrive così:

$$B = \sqrt{A};$$

dunque, radice quadrata di un numero è un altro numero, che elevato a quadrato riproduce il numero dato.

Esempio. 4 essendo il quadrato di 2, 2 è la radice quadrata di 4.

$\frac{9}{25}$ essendo il quadrato di $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$ è la radice quadrata di $\frac{9}{25}$.

E si scrive:

$$2 = \sqrt{4}, \quad \frac{3}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}}.$$

277. Qualunque numero, che sia il quadrato di un numero intero o frazionario, si dice un *quadrato perfetto*.

Qualunque numero, che non è nè intero, nè frazionario, si dice *incommensurabile*.

Abbiamo veduto (**275**) che, se un numero intero non è il quadrato di un numero intero, non può essere il quadrato di una frazione; dunque non è un quadrato perfetto. Similmente, una frazione irriducibile, i cui due termini non sono quadrati perfetti, non può essere un quadrato perfetto (**275**).

Da ciò segue che la radice quadrata di un numero N, che non è quadrato perfetto, non può esprimersi nè

con un numero intero, nè con una frazione, e quindi è un numero incommensurabile. Ora queste radici quadrate hanno bisogno di una nuova definizione, poichè quella che abbiamo già data (276) non si può evidentemente applicare in questo caso.

La radice quadrata di un numero N, che non è quadrato perfetto, si definisce, dicendo che *è un numero incommensurabile maggiore dei numeri interi o frazionari, i cui quadrati sono inferiori ad* N, *e minore dei numeri interi o frazionari, i cui quadrati sono superiori ad* N.

È facile vedere che $\sqrt{N}$ è effettivamente un numero, cioè può esprimere la misura di una grandezza. Consideriamo, per esempio, il cammino percorso da un mobile, che parte da un punto di una linea retta indefinita e si muove su questa retta sempre nella stessa direzione. Il cammino di cui si tratta crescerà in un modo *continuo* a cominciare da zero; il quadrato del numero che lo misura, prima minore di N, finirà per divenire più grande di N. Si concepisce che, in un certo istante, il cammino percorso sarà maggiore di tutte le lunghezze misurate da numeri, i cui quadrati sono minori di N, e minore delle lunghezze misurate da numeri, i cui quadrati sono maggiori di N; in questo istante il cammino percorso dal mobile sarà misurato da $\sqrt{N}$.

In generale, se, dopo avere adottato una certa lunghezza come unità di misura, si riguardano tutti i numeri come esprimenti lunghezze portate sopra una stessa retta a partire da un'origine determinata, cioè da un punto fisso preso sulla retta, su una parte di questa retta cadranno le estremità delle lunghezze misurate da numeri minori di $\sqrt{N}$, e su un'altra parte quelle delle lunghezze misurate da numeri maggiori di

$\sqrt{N}$. Ora fra queste due regioni non potrà evidentemente esistere alcun intervallo, ma solo un *punto di demarcazione:* la distanza fra questo punto e l'origine è, per definizione, misurata da $\sqrt{N}$.

278. L'operazione, mediante la quale si determina la radice quadrata di un numero, è detta *estrazione della radice quadrata.*

La questione che ci proponiamo di risolvere può enunciarsi nel seguente modo:

Essendo dato un numero N *intero o frazionario, estrarre la sua radice quadrata esattamente, se* N *è un quadrato perfetto, e con una data approssimazione nel caso contrario.*

Radice quadrata a meno di una unità

279. La radice quadrata di un numero, a meno di una unità, è il massimo numero intero che sia contenuto nella radice quadrata di questo numero.

Sia m il maggior numero intero contenuto in $\sqrt{N}$, essendo N un numero non quadrato perfetto; avremo

$$m < \sqrt{N} < m + 1:$$

inalzando a quadrato questi tre numeri, le loro relazioni di grandezza rimarranno inalterate ed otterremo

$$m^2 < N < (m + 1)^2;$$

dunque N è compreso fra m^2 ed $(m + 1)^2$. Ora, essendo m ed $m + 1$ due numeri interi consecutivi, fra m^2 ed $(m + 1)^2$ non vi sono altri quadrati di numeri interi, dunque m^2 è il maggior quadrato intero contenuto in N, e la sua radice quadrata m è, per ipotesi, la radice quadrata di N a meno di un' unità. Dunque si può an-

che dire che la radice quadrata di un numero a meno di un' unità è la radice quadrata del maggior quadrato intero contenuto in questo numero.

280. Teorema I. *La radice quadrata a meno di un' unità di un numero frazionario* N, *è eguale alla radice quadrata a meno di un' unità della parte intera di* N.

Supponiamo, infatti, che N sia compreso, per esempio, tra 3758 e 3759, si tratta di provare che la sua radice quadrata a meno di un' unità è la stessa di quella di 3758. E invero, per ciò che si è detto innanzi (**279**), la radice quadrata di N a meno di un' unità, è la radice quadrata del massimo quadrato intero contenuto in N. Ora, i numeri interi contenuti in N, sono 3758 e i numeri minori di esso, in guisa che il massimo quadrato intero contenuto in N è lo stesso che il massimo quadrato intero contenuto in 3758. E, per conseguenza, la radice di N a meno di un' unità è la stessa di quella di 3758.

281. Teorema II. *Se un numero intero ha* $2n$ *o* $2n-1$ *cifre, la sua radice quadrata ha* n *cifre.*

Un numero di una cifra è eguale o maggiore di 1 e minore di 10^1; un numero di due cifre è eguale o maggiore di 10^1 e minore di 10^2; un numero di tre cifre è eguale o maggiore di 10^2 e minore di 10^3; e in generale un numero di n cifre è eguale o maggiore di 10^{n-1} e minore di 10^n.

Ciò posto, supponiamo di volere estrarre la radice quadrata di un numero N di $2n$ cifre. Da ciò che precede si ha che

$$N < 10^{2n} \text{ ed } N \geqq 10^{2n-1},$$

ossia, a più forte ragione, $N > 10^{2n-2}$;

abbiamo dunque

$$10^{2n-2} < N < 10^{2n},$$

ed estraendo la radice dai tre numeri

$$10^{n-1} < \sqrt{N} < 10^{n}.$$

Dunque, essendo $\sqrt{N}$ compresa fra 10^{n-1} e 10^{n}, il numero delle sue cifre è n.

Se N ha $2n-1$ cifre, avremo

$$N \geqq 10^{2n-2} \text{ ed } N < 10^{2n-1};$$

$$\text{ossia, a più forte ragione, } N < 10^{2n};$$

quindi

$$10^{2n-2} \leqq N < 10^{2n};$$

ed estraendo la radice,

$$10^{n-1} \leqq N < 10^{n};$$

e perciò $\sqrt{N}$, essendo ancora compresa fra 10^{n-1} e 10^{n}, ha n cifre.

282. Quando un numero è minore di 100, la tavola di moltiplicazione fa conoscere il maggior quadrato che vi sia contenuto, e, per conseguenza, la sua radice quadrata a meno di una unità.

Esempio. La radice quadrata di 73 a meno di una unità, è 8, giacchè 64 è il maggior quadrato intero contenuto in 73.

Quando un numero è maggiore di 100, la sua radice quadrata a meno di un' unità, ha più di una cifra; il metodo che si usa per trovarla è fondato sui due seguenti teoremi.

283. Teorema III. *La radice quadrata di un numero* N, *maggiore di* 100, *contiene precisamente tante decine quante sono le unità della radice quadrata del numero delle centinaia del numero proposto.*

Se indichiamo con x il numero delle diecine di $\sqrt{N}$, $\sqrt{N}$ è compresa tra $x \times 10$ ed $(x+1) \times 10$; dunque, facendo i quadrati di questi tre numeri, N è compreso tra il quadrato di $x \times 10$, ovvero $x^2 \times 100$, e il quadrato di $(x+1) \times 10$, ovvero $(x+1)^2 \times 100$. Per conseguenza il numero N è compreso fra x^2 centinaia ed $(x+1)^2$ centinaia, e perciò il numero delle centinaia di N è compreso tra x^2 e $(x+1)^2$; o, in altri termini, x^2 è il maggior quadrato intero contenuto nelle centinaia di N, ed x è la radice di questo maggior quadrato.

Osservazione. Si è veduto che per avere il numero delle diecine contenute nella radice quadrata di un numero, bisogna cercare quante centinaia contiene questo numero, ed estrarre la radice quadrata dal resultato a meno di una unità. Quando il numero dato è intero, si avrà immediatamente il numero delle centinaia, sopprimendo le due ultime cifre a destra. Si può dunque dire:

Il numero delle diecine contenute nella radice quadrata di un numero intero N *è la radice quadrata a meno di una unità del numero* N_1, *ottenuto cancellando le due ultime cifre di* N.

Se N_1 è maggiore di 100, si può applicare il teorema precedente alla radice del numero N_1. Il numero delle diecine che vi sono contenute si otterrà, estraendo a meno di una unità la radice quadrata del numero N_2, ottenuto sopprimendo le due ultime cifre di N_1.

Ora, la radice di N_1 rappresentando il numero delle diecine contenute nella radice di N, il numero delle

diecine che contiene $\sqrt{N_1}$, altro non è che il numero delle centinaia contenute in $\sqrt{N}$. D'altra parte, N_1 essendosi ottenuto sopprimendo le due ultime cifre a destra di N, ed N_2 sopprimendo le due ultime cifre a destra di N_1, N_2 può ottenersi cancellando quattro cifre a destra di N. Si può dire dunque:

Il numero delle centinaia contenute nella radice quadrata di un numero intero N *è la radice quadrata a meno di una unità del numero* N_2, *ottenuto sopprimendo le quattro ultime cifre di* N.

Al modo stesso si vedrà che il numero delle diecine contenute nella radice quadrata di N_2, cioè a dire il numero di migliaia contenute nella radice quadrata di N, è uguale alla radice quadrata del numero N_3, ottenuto sopprimendo le due ultime cifre di N_2, cioè sopprimendo le sei ultime cifre di N. Si può dunque dire:

Il numero delle migliaia contenute nella radice quadrata di un numero intero N *è la radice quadrata a meno di una unità del numero ottenuto, sopprimendo le sei ultime cifre di* N, e così di seguito indefinitamente.

284. Teorema IV. *Se da un numero intero* N *si toglie il quadrato delle diecine della sua radice, e si dividono le diecine del resto pel doppio di quelle della radice, si ottiene un quoziente superiore o eguale alla cifra delle unità della radice.*

Indichiamo con a il numero delle diecine di $\sqrt{N}$, e con b la cifra delle unità di questa radice. La parte intera di $\sqrt{N}$ è $a \times 10 + b$; quindi N è *almeno* eguale ad $(a \times 10 + b)^2$, ovvero (265) ad $a^2 \times 100 + 2a \times b \times 10 + b^2$. Dunque togliendo da N il quadrato delle diecine della sua radice, cioè $a^2 \times 100$, e indicando con R il resto $N - a^2 \times 100$, questo sarà *almeno* eguale a

$2a \times b \times 10 + b^2$ e conterrà *almeno* $2 \times a \times b$ diecine. Da ciò segue che, dividendo per $2 \times a$ questo numero delle diecine di R, avremo per quoziente *almeno* $\frac{2 \times a \times b}{2 \times a} = b$, ossia un quoziente eguale o superiore a b.

285. Osservazione. Per determinare il valore esatto della cifra delle unità, bisogna provare successivamente il limite dato dal teorema precedente, se è minore di dieci, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Le prove da fare consistono nel formare il quadrato della radice presunta, e vedere se questo quadrato è contenuto nel numero proposto: quando ciò non avviene, la cifra provata deve essere diminuita. Vedremo più lungi come si abbreviano queste prove, profittando dei calcoli fatti anteriormente.

Regola generale per l'estrazione della radice quadrata

286. Per trovare quante diecine contiene la radice quadrata di un numero intero, basta (**283**) estrarre la radice da un numero avente due cifre di meno. Conosciuto il numero delle diecine, si può trovare la cifra delle unità. Dunque la ricerca della radice quadrata di un numero è ridotta a quella di un altro numero che ha due cifre di meno; a questo nuovo numero si potrà al modo stesso sostituirne un altro anche più semplice, e così di seguito, sino a che si pervenga a un numero di una o due cifre, di cui si conoscerà immediatamente la radice.

Siamo quindi condotti alla seguente regola:

1°. *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero, si divide questo numero in classi di due cifre cominciando dalla destra: il numero di queste classi,*

di cui l'ultima a sinistra può avere una sola cifra, è quello delle cifre della radice.

Se infatti vi sono n classi, il numero proposto contiene $2n$ o $2n-1$ cifre, e allora (**281**) la sua radice quadrata ha n cifre.

2° *La prima cifra della radice è la radice quadrata a meno di un' unità del numero espresso dall' ultima classe.*

Consideriamo, per esempio, il numero $N=13764932$, al quale riferiremo tutte le spiegazioni che seguono.

Il numero delle diecine di $\sqrt{N}$ (**283**) è la radice quadrata a meno di un' unità di 137649: il numero delle centinaia di $\sqrt{N}$ è (**283**) la radice quadrata a meno di una unità di 1376, e il numero delle sue migliaia, la radice quadrata a meno di un' unità di 13 (**283**). Ora, 13 è precisamente l' ultima classe del numero proposto; dunque la seconda parte della regola è dimostrata, e la radice quadrata di 13, o 3, è la prima cifra della radice.

3° *Dopo avere ottenuta questa prima cifra, se ne forma il quadrato, che si toglie dal numero espresso dall' ultima classe; accanto al resto si scrivono le due cifre che formano la classe seguente, e si dividono le diecine del numero* R_1, *così formato, pel doppio della prima cifra della radice. Il quoziente è eguale o superiore alla seconda cifra.*

Per trovare il numero delle centinaia, cioè a dire le due prime cifre della radice cercata, basta estrarre la radice da 1376, di cui si conosce già la cifra delle diecine 3; a questo oggetto si toglierà da 1376 il quadrato delle 3 diecine della sua radice, e, dividendo le diecine del resto pel doppio di quelle della radice, si otterrà (**284**) un quoziente maggiore o eguale alla cifra delle unità.

Il quadrato delle 3 diecine è 9 centinaia, togliendo le quali da 1376, si ha per resto 476; dividendo 47, che son le decine del resto per 6, doppio della cifra trovata nella radice, il quoziente è 7: la seconda cifra della radice cercata non può dunque superare 7.

4° *Il valore esatto di questa seconda cifra si determina, provando successivamente il quoziente trovato, se è minore di 10, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Per fare queste prove, si raddoppia la prima cifra della radice, si scrive alla destra del resultato la cifra da provare, e si moltiplica il numero così formato per la cifra stessa. Se il prodotto è minore del numero* R_1, *definito* (3°), *la cifra provata è esatta, altrimenti bisogna provare la cifra inferiore di un'unità, e così di seguito se quest' ultima fosse troppo grande.*

Il numero R_1, definito (3°), è nel caso attuale 476, che si è ottenuto togliendo da 1376 il quadrato delle 3 diecine che contiene la sua radice. Ora, questa radice essendo composta di 3 diecine, più un certo numero di unità, il quadrato si compone (**265**) del quadrato delle 3 diecine, del prodotto delle unità pel doppio delle 3 diecine, e del quadrato delle unità; e poichè la somma di queste tre parti deve essere contenuta in 1376, ne segue che la somma delle due ultime deve potersi togliere dall' eccesso di 1376 sulla prima parte, cioè da 476. Ora, la quarta parte della regola consiste precisamente in questa verificazione; e infatti, quando per provare 7 si moltiplica questo numero, come abbiamo indicato, per 67, il prodotto si compone di $7 \times 7 + 7 \times 60$, cioè del quadrato delle unità presunte, più il prodotto di queste unità pel doppio delle diecine trovate. Se dunque il prodotto non può sottrarsi da 476, la cifra 7 è troppo grande.

Nel caso attuale questo prodotto è uguale a 469,

che può togliersi da 476 e lascia per resto 7. La cifra 7 è dunque esatta. L'operazione ci dice inoltre, che l'eccesso di 1376 sul quadrato di 37 è eguale a 7.

5° *Alla destra del resto ottenuto nell'operazione precedente, si scrivono le due cifre della classe seguente, e si dividono le decine del numero* R_2, *così formato, pel doppio del numero formato dalle due prime cifre della radice ; il quoziente è maggiore o eguale alla terza cifra.*

Il numero delle diecine contenuto nella radice cercata è (**283**) la radice quadrata a meno di un'unità di 137649. Dunque, per trovare il numero di queste diecine, cioè l'insieme delle tre prime cifre della radice, basta estrarre la radice quadrata di 137649, di cui già si conosce il numero delle diecine 37. A quest'oggetto, si toglierà da 137649 il quadrato delle 37 diecine della sua radice, e, dividendo le diecine del resto pel doppio di quelle della radice, si otterrà (**284**) un quoziente maggiore o eguale alla cifra delle sue unità.

Il quadrato delle 37 diecine è 1369 centinaia. L'eccesso di 137649 sul quadrato delle 37 diecine, o il numero R_2, è dunque 749; dividendo il numero delle sue diecine, 74, per 74 doppio di 37, il quoziente è 1; dunque la cifra delle unità della radice di 137649, cioè la terza cifra della radice cercata, non può superare 1.

6° *Il valore esatto di questa terza cifra si determina, provando successivamente il quoziente trovato, se è minore di 10, ed i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Per fare queste prove, si raddoppia il numero formato dall'insieme delle due prime cifre, si scrive alla sua destra la cifra da provare, e si moltiplica il numero così formato per la cifra stessa. Se questo prodotto può togliersi dal numero* R_2, *definito* (5°), *la ci-*

fra provata è esatta, altrimenti bisogna diminuirla di un' unità e provarla di nuovo.

Il numero R_2, definito (5°), è, nel caso attuale, 749, che si è ottenuto togliendo da 137649 il quadrato delle 37 diecine della sua radice. Ora, questa radice essendo composta di 37 diecine, più un certo numero di unità, il suo quadrato si compone del quadrato delle 37 diecine, del prodotto delle unità pel doppio di 37 diecine, e del quadrato delle unità. E poichè la somma di queste tre parti dev' essere contenuta in 137649, ne segue che la somma delle due ultime deve potersi togliere dall' eccesso di 137649 sulla prima parte, cioè a dire da 749. Ora, la sesta parte della regola consiste precisamente in questa verificazione; e infatti, quando per trovare 1 si moltiplica, come si è indicato, la cifra 1 pel numero 741, essendo $741 = 740 + 1$, il prodotto si compone di $1 \times 1 + 1 \times 740$, cioè del quadrato delle unità, e del prodotto di queste unità presunte pel doppio delle diecine. Se dunque questo prodotto non potesse togliersi da 749, la cifra 1 sarebbe troppo grande.

Nel caso attuale, il prodotto è uguale a 741, che può togliersi da 749, e lascia per resto 8. La cifra 1 è dunque esatta, e l' operazione ci fa vedere inoltre che l' eccesso di 137649 sul quadrato di 371, è 8.

7° *Quando si è trovata la terza cifra, un procedimento affatto simile fornisce la quarta, poi la quinta*, ecc.

Ciò non ha bisogno di spiegazioni.

Nel caso attuale, per determinare la quarta cifra della radice, si scriverà alla destra del resto 8 la classe seguente 32, e si dividerà 83, numero delle diecine di 832 pel doppio di 371, cioè per 742; il quoziente di questa divisione essendo 0, la cifra delle unità della radice è 0. È evidente ch' è inutile provarla.

La radice quadrata di 13764932 è dunque 3710, e il resto 832, cioè

$$13764932 = (3710)^2 + 832,$$

come è del resto facile verificare.

OSSERVAZIONE. Se, dopo avere scritto accanto ad un resto la classe seguente, il numero formato dal resto e dalla prima cifra di quella classe non è divisibile per il doppio della radice già trovata, si scrive uno zero nella radice, si abbassa un nuovo gruppo di due cifre accanto al resto e si prosegue l'operazione al solito modo.

287. TEOREMA V. *Il resto, ottenuto nell' estrazione di una radice quadrata, non può mai superare il doppio della radice.*

Siano, infatti, N un numero intero, ed R la sua radice quadrata a meno di un' unità; il resto dell' operazione è la differenza $N - R^2$; se questo resto superasse $2R$, dovrebbe per lo meno essere $2R + 1$, e quindi si avrebbe

$$N - R^2 \geqq 2R + 1,$$

e perciò, aggiungendo R^2 ad ambedue i membri di questa diseguaglianza,

$$N \geqq R^2 + 2R + 1;$$

ossia N sarebbe almeno eguale ad $R^2 + 2R + 1$, cioè ad $(R + 1)^2$, e la sua radice sarebbe per conseguenza almeno eguale ad $R + 1$.

Reciprocamente, se il quadrato di un numero intero R è minore di N e la differenza $N - R^2$ non supera $2R$, questo numero R è la radice quadrata di N a meno di un' unità.

Infatti, $N - R^2$ essendo minore di $2R + 1$, N è minore di $R^2 + 2R + 1$, cioè di $(R + 1)^2$, e per conseguenza R^2 è il maggiore quadrato intero che vi sia contenuto, ed R, che è la radice di R^2, è per definizione la radice di N a meno di un' unità.

288. **Osservazione.** Talune volte accade che, l'abitudine del calcolo facendo presumere che una cifra da provare sia troppo grande, si diminuisca immediatamente di una o più unità; provandola dopo questa diminuzione, si vede se è troppo grande, e, se è troppo piccola, ne saremo avvertiti dal teorema precedente, perchè il resto corrispondente supererà il doppio del numero formato dalle cifre già trovate della radice.

Modo di disporre l' operazione

289. Prendiamo per esempio il numero 412234, al quale applicheremo la regola precedente:

412234	642
36	124
522	4
496	1282
2634	2
2564	
70	

1° Si divide il numero in classi di due cifre; queste classi essendo in numero di 3, la radice avrà 3 cifre.

2° La radice quadrata dell' ultima classe a sinistra 41 è 6; 6 è dunque la prima cifra della radice.

3° Da 41 si toglie il quadrato di 6, il resto è 5. Alla destra di 5 si scrive la seconda classe 22 e si divide 52, numero delle diecine di 522, pel doppio, 12,

della cifra 6 scritta alla radice. Il quoziente 4 di questa divisione è la seconda cifra della radice, o una cifra troppo grande.

4° Per provarla, si scrive alla destra di 12, doppio della prima cifra, e si moltiplica il numero 124 così formato per 4. Il prodotto 496 potendo togliersi da 522, e lasciando per resto 26, la cifra 4 è esatta.

5° Alla destra del resto 26 si scrive la terza classe del numero proposto, e si divide 263, numero delle diecine di 2634, pel doppio del numero 64 scritto alla radice, cioè per 128. Il quoziente 2 di questa divisione è la terza cifra della radice, o una cifra troppo grande.

6° Per provare 2, si scrive alla destra di 128, doppio del numero espresso dalle due prime cifre, e si moltiplica il numero 1282, così formato, per 2. Il prodotto 2564 potendo togliersi da 2634, la cifra 2 è esatta, e la radice è 642; il resto è 70.

290*. Supponiamo che, estraendo la radice quadrata a meno di una unità di un numero qualunque N, si sia trovato il numero a; $\sqrt{N}$ è compresa fra a ed $a+1$; ma quale di questi due valori è più vicino al vero? o, in altri termini, $\sqrt{N}$ è compresa fra a ed $a+\frac{1}{2}$, o fra $a+\frac{1}{2}$ ed $a+1$? Per rispondere a questa quistione osserviamo che, allorquando $\sqrt{N}$ è compresa fra a ed $a+\frac{1}{2}$, N sarà compreso fra a^2 ed $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$, ovvero fra a^2 ed $a^2+a+\frac{1}{4}$. Ora si ha $N=a^2+r$, r essendo il resto trovato nell' estrazione della radice quadrata di N; ne segue che se r è eguale o minore di a, e, per conseguenza, di $a+\frac{1}{4}$, N è

per l'appunto compresa fra i limiti precedenti; ed in questo caso a sarà la radice quadrata di N a meno di $\frac{1}{2}$. Similmente allorquando $\sqrt{N}$ è compresa fra $a+\frac{1}{2}$ ed $a+1$, N sarà compreso fra $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ ed $(a+1)^2$ ovvero (**265**) fra $a^2+a+\frac{1}{4}$ ed a^2+2a+1; la qual condizione sarà verificata allorchè r sarà maggiore di a e per conseguenza di $a+\frac{1}{4}$, perchè r è intero. Quando ciò avvenga $a+1$ sarà la radice quadrata di N a meno di $\frac{1}{2}$.

Possiamo dunque enunciare la seguente regola:

La radice del massimo quadrato contenuto in un numero dato, sarà la radice di questo numero a meno di una mezza unità per difetto, se il resto è eguale a questa radice o minore di essa, e questa radice aumentata di un' unità sarà la radice del numero dato a meno di una mezza unità per eccesso, se il resto è maggiore della radice.

Calcolo delle radici quadrate con una data approssimazione

291. Le radici dei numeri che non sono quadrati perfetti possono determinarsi con quella approssimazione che si vuole. Abbiasi un numero A, del quale si voglia la radice quadrata approssimata a meno di $\frac{1}{n}$; questo vuol dire trovare il maggior numero di n^{esimi} contenuto in $\sqrt{A}$, ossia il maggior multiplo di $\frac{1}{n}$ con-

contenuto in $\sqrt{A}$. Indicando con x questo numero di n^{esimi}, avremo la relazione

$$\frac{x}{n} \leqq \sqrt{A} < \frac{x+1}{n};$$

dunque i tre numeri $\frac{x}{n}$, $\sqrt{A}$ ed $\frac{x+1}{n}$ son disposti per ordine di grandezza: anche fra i loro quadrati sussisteranno le stesse relazioni ed avremo

$$\frac{x^2}{n^2} \leqq A < \frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

Queste relazioni rimarranno inalterate, moltiplicando tutti e tre i numeri per n^2; avremo allora

$$x^2 \leqq A \times n^2 < (x+1)^2,$$

ed estraendo la radice,

$$x \leqq \sqrt{A \times n^2} < x+1.$$

Dunque, essendo $\sqrt{A \times n^2}$ compresa fra x ed $x+1$, si vede subito che x è la radice quadrata a meno di un unità del prodotto $A \times n^2$: i due valori $\frac{x}{n}$ ed $\frac{x+1}{n}$ differiscono dal vero valore di $\sqrt{A}$ meno di $\frac{1}{n}$ per difetto o per eccesso.

Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

Per estrarre la radice quadrata da un numero A *a meno di un numero dato* $\frac{1}{\mathrm{n}}$, *bisogna estrarre la radice quadrata a meno di un' unità del prodotto* $\mathrm{A} \times \mathrm{n}^2$, *ed al resultato dare per denominatore* n.

ESEMPIO. Debbasi estrarre la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$; moltiplichiamo $\frac{73}{5}$ per 49, quadrato di 7: il prodotto è $\frac{73 \times 49}{5}$, cioè $\frac{3577}{5}$ o $715\,\frac{2}{5}$; la sua radice quadrata a meno di un' unità, che è la stessa che quella di 715 (**280**), è eguale a 26, e per conseguenza la radice di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$ è $\frac{26}{7}$, cioè la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ è compresa fra $\frac{26}{7}$ e $\frac{27}{7}$.

292. *Quando il denominatore di una frazione è un quadrato perfetto* b^2, *la radice quadrata di questa frazione a meno di* $\frac{1}{b}$ *si ottiene, estraendo la radice quadrata del numeratore a meno di un' unità, e dividendo il risultato per* b.

Questa proposizione risulta immediatamente dalla regola generale; giacchè, secondo questa regola, per estrarre la radice quadrata da $\frac{a}{b^2}$ a meno di $\frac{1}{b}$, bisogna moltiplicare $\frac{a}{b^2}$ per b^2, estrarre la radice quadrata del prodotto a a meno di un' unità, e dividere il resultato per b, che è precisamente l' operazione indicata.

Quando si debba estrarre invece la radice quadrata da una frazione, il cui denominatore non sia un quadrato perfetto, si comincia dal rendere questo denominatore un quadrato perfetto, moltiplicando ambedue i termini della frazione per il suo denominatore; allora si ritorna al caso precedente e si opera allo stesso modo. Così per estrarre la radice quadrata da una frazione $\frac{a}{b}$, non essendo b un quadrato perfetto, moltipli-

cheremo ambedue i termini per b ed avremo $\frac{a \times b}{b^2}$; supposto allora che $\sqrt{a \times b}$ sia compresa fra m ed $m+1$, la radice quadrata della frazione proposta sarà (**291**) compresa fra $\frac{m}{b}$ ed $\frac{m+1}{b}$ ed approssimata quindi al vero a meno di $\frac{1}{b}$ per difetto o per eccesso.

Esempio. Debbasi estrarre la radice quadrata da $\frac{73}{5}$; questa frazione è uguale a $\frac{73 \times 5}{5 \times 5}$ o $\frac{365}{25}$. Per avere la sua radice quadrata a meno di $\frac{1}{5}$ basta dunque estrarre a meno di una unità la radice quadrata di 365, che è 19, e dividerla per 5; dunque la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{5}$ è $\frac{19}{5}$ per difetto o $\frac{20}{5}$ per eccesso.

293. Talune volte, per rendere il denominatore di una frazione un quadrato perfetto, si può adoprare un moltiplicatore minore del suo denominatore. Infatti, (**273**) perchè un numero sia un quadrato perfetto, basta che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari; quindi, per rendere un numero quadrato perfetto, basterà moltiplicarlo pel prodotto di tutti i fattori primi che son contenuti in esso con esponenti impari.

Abbiasi, per esempio, la frazione $\frac{1275}{300}$ o $\frac{1275}{3 \times 2^2 \times 5^2}$; per rendere il suo denominatore un quadrato perfetto, basta moltiplicare i suoi due termini per 3, e allora diventa $\frac{3 \times 1275}{3^2 \times 2^2 \times 5^2}$ o $\frac{3825}{30^2}$; la radice quadrata di 3825 a meno di un'unità è 61, e per conseguenza quella di $\frac{3825}{30^2}$ a meno di $\frac{1}{30}$ è $\frac{61}{30}$.

Valutazione in decimali della radice quadrata di un numero intero o frazionario

294*. Consideriamo un numero N intero o frazionario, e supponiamo che si voglia valutare $\sqrt{N}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$. Secondo la regola precedente, bisogna: 1° *moltiplicare* N *pel quadrato di* 10^n, *che è* 10^{2n}; 2° *estrarre a meno di un' unità la radice quadrata del prodotto;* 3° *dividere il resultato per* 10^n. Questa regola può essere enunciata in due modi diversi, secondochè si suppone che N sia intero o frazionario.

1° *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero* N *a meno di* $\frac{1}{10^{\text{n}}}$ *si scrivono* 2n *zeri alla destra di* N, *si estrae la radice quadrata a meno d'un'unità del numero così formato, e si separano* n *cifre decimali alla destra del risultato.*

2° *Per estrarre la radice quadrata da un numero frazionario a meno di* $\frac{1}{10^{\text{n}}}$ *si valuta questo numero a meno di* $\frac{1}{10^{2\text{n}}}$, *si sopprime la virgola, poi si estrae la radice quadrata dell' intero così ottenuto a meno di un' unità, e si separano* n *cifre decimali alla sua destra.*

Esempi. 1° Valutare $\sqrt{2}$ a meno di $\frac{1}{10^4}$ o di 0,0001.

I valori a meno di un' unità di $\sqrt{200000000}$ sono 14142 e 14143; quindi 1,4142 e 1,4143 sono i valori di $\sqrt{2}$ a meno di 0,0001, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

2° Valutare $\sqrt{\frac{5}{7}}$ a meno di $\frac{1}{10^3}$ o di 0,001. Il va-

lore di $\frac{5}{7}$ in decimali, a meno di $\frac{1}{10^6}$, è 0,714285. I valori di $\sqrt{714285}$, a meno di un'unità, sono 845 e 846; per conseguenza, 0,845 e 0,846 sono i valori di $\sqrt{\frac{5}{7}}$ a meno di 0,001, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

3° Valutare $\sqrt{3,141}$ a meno di 0,001. Secondo la regola, bisogna esprimere 3,141 con 6 decimali, ciò che si farà scrivendo tre zeri alla destra di questo numero. Sopprimendo poi la virgola, si ha il numero 3141000. I valori di $\sqrt{3141000}$ a meno di un'unità sono 1772 e 1773; per conseguenza i valori di $\sqrt{3,141}$, a meno di 0,001, sono 1,772 e 1,773.

295. Osservazione. Da ciò che si è detto innanzi si vede che *per determinare la radice di un numero a meno di* $\frac{1}{10^n}$, ***basta conoscere le* 2n *prime cifre decimali del suo valore in decimali;*** quindi, se un numero ha più di $2n$ cifre decimali, basterà considerare le sole prime $2n$, e fare astrazione dalle altre.

Esempio. Debbasi estrarre a meno di $\frac{1}{10^2}$ la radice quadrata di 3,7157248932; basterà considerare le sole prime quattro cifre decimali, cioè basterà considerare il numero 3,7157. Sopprimendo la virgola, si ottiene 37157. I valori di $\sqrt{37157}$ a meno di un'unità sono 192 e 193; per conseguenza 1,92 e 1,93 son i valori di $\sqrt{3,7157248932}$ a meno di 0,01.

Esercizî

I. Qualunque quadrato impari diviso per 8 dà per resto 1.

II. La radice di $\frac{n-1}{n}$ a meno di $\frac{1}{n}$ è $\frac{n-1}{n}$: è questo il solo numero che sia eguale alla sua radice a meno di $\frac{1}{n}$?

III. Se un numero è la somma di due quadrati interi, è altresì la somma di due quadrati il suo quadrato, od il suo doppio, e, se è pari, anche la sua metà.

IV. Qualunque numero dispari è la differenza di due quadrati interi.

V. Se a e b sono numeri primi fra loro, uno pari e l'altro impari, la differenza dei loro quadrati non può essere un quadrato, che se $a+b$ e $a-b$ sono essi pure quadrati.

VI. Dedurre dal teorema precedente che i quadrati eguali alla somma di due altri sono tutti dati dalla formula,

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2+(xy)^2;$$

x e y indicando numeri interi qualunque.

VII. Se a, b, c sono tre numeri differenti, $a+b+c$ è minore di $\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

VIII. a, b, m, n essendo quattro numeri qualunque, $(am+bn)^2$ è minore di $(a^2+b^2)(m^2+n^2)$; l'eguaglianza è possibile in un caso: quale è questo caso?

IX. Se un quadrato intero a^2 è eguale alla somma di

due altri $b^2 + c^2$, uno dei tre numeri a, b o c è divisibile per 5.

X. Il valore di un diamante è proporzionale al quadrato del suo peso. Provare che, dividendo il diamante in due pezzi, si diminuisce il valore e che questa diminuzione di valore è la maggiore possibile quando i due pezzi hanno lo stesso peso.

XI. Estendere la proposizione precedente al caso nel quale il diamante è rotto in un dato numero di pezzi: il valore totale di questi pezzi è il minimo possibile, quando essi hanno lo stesso peso.

XII. La differenza fra i quadrati di due numeri interi consecutivi è 251. Quali sono i due numeri. 125-126

XIII. La somma dei quadrati di due numeri è 204525 e la differenza degli stessi quadrati è 95013. Quali sono i due numeri?

XIV. Si domanda ad una persona quanto possiede ed essa risponde: dividendo il quadrato della somma che posseggo per $\frac{5}{7}$ si ottengono L. 7665840. Quanto possiede?

XV. Dividendo il quadrato del prezzo di un brillante per $\frac{7}{10}$ del prezzo stesso, si otterrebbero L. 500. Quanto costa quel brillante?

XVI. Un mercante compra un certo numero di ettolitri di grano, pagando per ognuno di essi un numero di lire eguale a $\frac{4}{15}$ del numero di ettolitri comprati, e spende in tutto L. 960. Quanti ettolitri di grano ha comprato e qual'è il prezzo di un ettolitro?

XVII. Qual'è quel numero, che, aggiunto al suo quadrato, dà per resultato 150156?

XVIII. Un capitano, volendo disporre i soldati della sua compagnia in quadrato pieno, trova che gliene mancano 18 a compiere la figura. Ne mette allora uno di meno per lato e così glie ne avanzano 5. Quanti sono i soldati della compagnia?

XIX. Un colonnello ha nel suo reggimento 1152 soldati e vuol formare con essi un quadrato a centro vuoto, il qual vuoto abbia 42 uomini per lato. Quanti uomini andranno posti nella prima fila esterna e quante file sarà profondo il quadrato?

XX. La somma dei quadrati di tre numeri è 2113; il quadrato del primo numero supera il quadrato del secondo di 245 unità, ed il quadrato del terzo numero supera quello del secondo di 416 unità. Quali sono i tre numeri?

CAPITOLO XIII

TEORIA DEI CUBI E DELLE RADICI CUBICHE

Teoremi relativi ai cubi

296. Teorema I. *Il cubo della somma di due numeri si compone del cubo del primo, più tre volte il prodotto del secondo numero per il quadrato del primo, più tre volte il prodotto del primo per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo numero.*

Siano a e b i numeri proposti. Formare il cubo della loro somma $a+b$ significa moltiplicare $(a+b)^2$ per $(a+b)$; ora (**265**).

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\times a\times b + b^2.$$

Per moltiplicare questa somma per $a+b$, bisogna moltiplicare le tre parti del moltiplicando per a, poi per b, e sommare i resultati: si ottiene

$$\begin{gathered}(a+b)^3 = (a^2 + 2\times a\times b + b^2)\times(a+b) = \\ = a^2\times a + 2\times a\times b\times a + b^2\times a + a^2\times b + \\ + 2\times a\times b\times b + b^2\times b\end{gathered}$$

ossia

$$\begin{gathered}(a+b)^3 = a^3 + 2\times a^2\times b + b^2\times a + a^2\times b + \\ + 2\times a\times b^2 + b^3;\end{gathered}$$

ovvero, osservando che

$$2 \times a^2 \times b + a^2 \times b = 3 \times a^2 \times b;$$
$$b^2 \times a + 2 \times a \times b^2 = 3 \times a \times b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3;$$

ciò che bisognava dimostrare.

OSSERVAZIONE. *Il cubo di un numero composto di diecine e di unità è eguale al cubo delle diecine, più tre volte il prodotto del quadrato delle diecine per le unità, più tre volte il prodotto delle diecine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità.*

Indicando con d la cifra delle diecine e con u quella delle unità del numero dato, esso potrà scriversi $d \times 10 + u$ ed il suo cubo sarà, per il teorema precedente,

$$(d \times 10 + u)^3 = (d \times 10)^3 + 3 \times (d \times 10)^2 \times u + \\ + 3 \times (d \times 10) \times u^2 + u^3$$

ossia

$$(d \times 10 + u)^3 = d^3 \times 1000 + 3 \times d^2 \times 100 \times u + \\ + 3 \times d \times 10 \times u^2 + u^3,$$

che può scriversi

$$(d \times 10 + u)^3 = d^3 \times 1000 + 3 \times d^2 \times u \times 100 + \\ + 3 \times d \times u^2 \times 10 + u^3,$$

relazione, che ci mostra che il cubo delle diecine (d^3) dà per resultato migliaia, il triplo del prodotto del quadrato delle diecine per le unità ($3 \times d^2 \times u$) dà per resultato centinaia, il triplo del prodotto delle diecine per il quadrato delle unità ($3 \times d \times u^2$) dà per resultato diecine ed il cubo delle unità (u^3) dà per resultato unità.

297. Teorema II. *La differenza dei cubi di due numeri interi consecutivi è uguale a tre volte il quadrato del numero minore, più tre volte questo numero minore, più 1.*

Se, infatti, s' indicano questi due numeri con a ed $a+1$, si ha, in virtù del teorema precedente,

$$(a+1)^3 = a^3 + 3 \times a^2 + 3 \times a + 1;$$

togliendo da ambedue i membri dell'eguaglianza a^3, si trova

$$(a+1)^3 - a^3 = 3 \times a^2 + 3 \times a + 1.$$

298. Teorema III. *Il cubo di una potenza si ottiene triplicando l' esponente della potenza.*

Infatti

$$(a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \times 3} = a^{12}.$$

299. Teorema IV. *Il cubo di un prodotto è eguale al prodotto dei cubi dei fattori.*

Abbiasi il prodotto $a \times b \times c$, si ha

$$(a \times b \times c)^3 = a \times b \times c \times a \times b \times c \times a \times b \times c,$$

ovvero, sostituendo ai fattori eguali il loro prodotto effettuato,

$$(a \times b \times c)^3 = a^3 \times b^3 \times c^3;$$

ciò che bisognava dimostrare.

300. Osservazione. Se alcuni fattori son potenze, per elevarli a cubo basterà moltiplicare per 3 gli espo-

nenti (**298**). Per esempio, volendo formare il cubo di $a^3 \times b^2 \times c$, avremo per resultato (**299**)

$$(a^3)^3 \times (b^2)^3 \times c^3$$

e quindi (**298**)

$$a^9 \times b^6 \times c^3.$$

301. Teorema V. *L'ultima cifra del cubo di un numero intero è eguale all'ultima cifra del cubo delle sue unità.*

Quando due numeri interi si moltiplicano l'uno per l'altro, la cifra delle unità del prodotto dipende solamente dall'ultima cifra di ciascun fattore; dunque, allorchè per elevare a cubo un numero, si moltiplicherà questo numero due volte per sè stesso, la cifra delle unità del risultato dipenderà solamente dall'ultima cifra di questo numero.

Osservazione. I cubi dei nove primi numeri interi sono 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729. Essi terminano tutti con cifre differenti; dunque basta conoscere l'ultima cifra del cubo di un numero per sapere con quale cifra termina questo numero. Se il cubo termina con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9, il numero stesso terminerà con 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, o 9.

302. Teorema VI. *Se il cubo di un numero intero è terminato da zeri, il loro numero è divisibile per* 3.

Affinchè un cubo sia terminato da zeri, bisogna (**301**) che lo sia il numero stesso. Questo numero dunque si può rappresentare, indicando con A la parte di esso costituita dalle cifre significative, con $A \times 10^n$ A essendo così un numero intero non terminato da zero, ed n il numero degli zeri che lo seguono. Il cubo di questo numero, $A^3 \times 10^{3n}$, termina evidentemente

con $3n$ zeri, cioè con un numero di zeri divisibile per 3; ciò che voleva dimostrarsi.

303. Teorema VII. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero intero sia il cubo di un altro numero intero, è che tutti gli esponenti dei suoi fattori primi siano divisibili per* 3.

1°. Questa condizione è necessaria; poichè, per formare il cubo di un numero risoluto in fattori primi, basta (**300**) triplicare gli esponenti di questi fattori, i quali, in conseguenza di ciò, divengono divisibili per 3. Così inalzando a cubo il numero $2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 7$ si ottiene $2^9 \times 3^6 \times 5^{12} \times 7^3$, nel quale tutti i fattori primi hanno esponenti multipli di 3.

2°. Questa condizione è sufficiente, poichè, supponendola soddisfatta, se si scrive il prodotto dei fattori primi del numero, dando a ciascuno di essi per esponente il quoziente della divisione per 3 dell'esponente, con cui compariscono nel numero stesso, si ottiene un nuovo numero, che elevato a cubo dà per resultato il numero proposto.

Così, dato il numero $3^{12} \times 5^6 \times 7^3$, si trova subito l'altro $3^4 \times 5^2 \times 7$, che inalzato a cubo riproduce il numero dato.

Osservazione. Dal teorema precedente resulta che un numero intero, che ammette un divisore primo p senza essere divisibile per il cubo di questo, p^3, non può essere un cubo perfetto; perchè, risolvendo quel numero in fattori primi, l'esponente del fattore p sarebbe 1 o 2, e per conseguenza non multiplo di 3.

Per esempio, un cubo non può essere divisibile per 2 senza esserlo per 8, e, per conseguenza, per 4; non per 3, senza esserlo per 27, e, per conseguenza, per 9.

304. Teorema VIII. *Il cubo di una frazione irri-*

ducibile è un' altra frazione irriducibile, avente per termini i cubi dei due termini della frazione data.

Sia $\frac{a}{b}$ una frazione, che supporremo ridotta alla più semplice espressione; il suo cubo è evidentemente $\frac{a^3}{b^3}$, perchè $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$. Ora, a essendo primo con b, a^3 è primo con b^3 (136); e quindi a^3 essendo primo con b^3, $\frac{a^3}{b^3}$ è pure irriducibile, e, siccome i suoi due termini sono evidentemente dei cubi, se ne conchiude che il cubo di una frazione, ridotto alla sua più semplice espressione, ha sempre per termini dei cubi, e di più che non può mai essere eguale ad un numero intero.

Definizione della radice cubica

305. Quando un numero A è il cubo di un altro numero B, si dice che B è la *radice cubica* di A, e si scrive così:

$$B = \sqrt[3]{A}.$$

Dunque radice cubica di un numero è un altro numero, che elevato a cubo riproduce il numero dato.

Esempi. 8 essendo il cubo di 2, 2 è la radice cubica di 8.

$\frac{27}{125}$ essendo il cubo di $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$ è la radice cubica di $\frac{27}{125}$; si scrive

$$2 = \sqrt[3]{8}, \qquad \frac{3}{5} = \sqrt[3]{\frac{27}{125}}.$$

306. Qualunque numero che è il cubo di un numero intero o frazionario si dice un *cubo perfetto*.

Abbiamo veduto che, se un numero intero non è il cubo di un numero intero, non può essere il cubo di una frazione; esso quindi non è un cubo perfetto. Similmente, una frazione irriducibile, i cui due termini non sono cubi perfetti, non può essere un cubo perfetto (**304**).

Da ciò segue che la radice cubica di un numero N, che non è cubo perfetto, non può esprimersi nè con un numero intero, nè con una frazione, e quindi è un numero incommensurabile (**277**). Ora, queste radici cubiche hanno bisogno di una nuova definizione, poichè quella che abbiamo già data (**305**) non si può evidentemente ad esse applicare.

La radice cubica di un numero N, che non è cubo perfetto, si definisce, dicendo che *è un numero incommensurabile maggiore dei numeri interi o frazionari, i cui cubi sono inferiori ad* N, *e minore dei numeri interi o frazionarî, i cui cubi sono superiori ad* N. È facile vedere che $\sqrt[3]{N}$ è effettivamente un numero, cioè può esprimere la misura di una grandezza. Consideriamo, per esempio, il cammino percorso da un mobile che parte da un punto di una linea retta indefinita e si muove su questa retta sempre nella stessa direzione. Il cammino di cui si tratta crescerà in un modo *continuo* a cominciare da zero; il cubo del numero che lo misura, prima minore di N, finirà per divenire più grande di N. Si concepisce che in un certo istante il cammino percorso sarà maggiore di tutte le lunghezze misurate da numeri, i cui cubi sono più piccoli di N, e minore delle lunghezze misurate da numeri, i cui cubi sono più grandi di N; in questo istante, il cammino percorso dal mobile sarà misurato da $\sqrt[3]{N}$.

In generale, se, dopo avere adottato una certa lunghezza come unità di misura, si riguardano tutti i numeri come esprimenti lunghezze contate sopra una stessa retta a partire da una origine determinata, cioè da un punto fisso preso sulla retta, su una parte di questa retta cadranno le estremità delle lunghezze misurate da numeri minori di $\sqrt[3]{N}$ e su un'altra parte quelle delle lunghezze misurate da numeri maggiori di $\sqrt[3]{N}$. Ora fra queste due regioni non potrà evidentemente esistere alcun intervallo, ma solo un *punto di demarcazione:* la distanza fra questo punto e l'origine è, per la definizione data; misurata da $\sqrt[3]{N}$.

307. Osservazione. L'operazione, mediante la quale si determina la radice cubica di un numero, è detta *estrazione della radice cubica.*

La questione che ci proponiamo di risolvere può enunciarsi nel seguente modo:

Essendo dato un numero N *intero o frazionario, estrarre la sua radice cubica esattamente, se* N *è un cubo perfetto, e con una data approssimazione nel caso contrario.*

Radice cubica di un numero a meno di una unità

308. La radice cubica di un numero a meno di un'unità, è il maggior numero intero che sia contenuto nella sua radice cubica.

Sia m il maggior numero intero contenuto in $\sqrt[3]{N}$, essendo N un numero non cubo perfetto; avremo

$$m < \sqrt[3]{N} < m + 1;$$

inalzando a cubo questi tre numeri, le loro relazioni di grandezza rimarranno inalterate ed otterremo

$$m^3 < N < (m+1)^3;$$

dunque N è compreso fra m^3 ed $(m+1)^3$. Ora, essendo m ed $m+1$ due numeri interi consecutivi, fra m^3 ed $(m+1)^3$ non vi sono altri cubi di numeri interi, dunque m^3 è il massimo cubo intero contenuto in N, e la sua radice cubica m è, per ipotesi, la radice cubica di N a meno di un' unità. Dunque si può anche dire che la radice cubica di un numero, a meno di un' unità, è la radice cubica del maggior cubo intero contenuto in questo numero.

309. Teorema I. *La radice cubica a meno di una unità di un numero frazionario è la stessa che quella della sua parte intera.*

Se, infatti, un numero N è compreso tra due interi consecutivi m ed $m+1$, il più gran cubo intero, che sia contenuto in N, è il più gran cubo intero inferiore od eguale ad m; esso è dunque il più gran cubo contenuto in m.

Esempio. $\dfrac{7832}{12}$ essendo eguale a $652\,\frac{8}{12}$, la sua radice cubica, a meno di una unità, è la stessa che quella di 652.

310. Teorema II. *Se un numero intero ha* 3n, 3n — 1, *o* 3n — 2 *cifre, la sua radice cubica a meno di un' unità ha* n *cifre.*

Infatti, supponiamo di volere estrarre la radice cubica da un numero intero N di $3n$ cifre. Si ha (281) $N < 10^{3n}$, $N \geqq 10^{3n-1}$, ed a più forte ragione $N > 10^{3n-3}$; ossia

$$10^{3n-3} < N < 10^{3n}$$

ed estraendo la radice cubica da tutti e tre i numeri

$$10^{n-1} < \sqrt[3]{N} < 10^n.$$

Dunque, essendo $\sqrt[3]{N}$ compresa fra 10^{n-1} e 10^n, ha n cifre (**281**).

Se N ha $3n-1$ cifre, avremo

$$N \geqq 10^{3n-2}, \qquad N < 10^{3n-1},$$

e, a più forte ragione,

$$N > 10^{3n-3}, \qquad N < 10^{3n};$$

ossia

$$10^{3n-3} < N < 10^{3n};$$

ed, estraendo la radice cubica di tutti questi numeri,

$$10^{n-1} < \sqrt[3]{N} < 10^n$$

dunque $\sqrt[3]{N}$ ha n cifre. Allo stesso risultato si giungerebbe, se N avesse $3n-2$ cifre; dunque il numero delle cifre della radice cubica di N è n in tutti e tre i casi.

Esempio. Se un numero ha 10 cifre, la sua radice cubica ne ha 4, perchè 10 è eguale a $3 \times 4 - 2$. Se ne ha 20, la sua radice ne ha 7, perchè 20 è eguale a $3 \times 7 - 1$.

311. Per estrarre la radice cubica dai numeri interi, è essenziale conoscere i cubi dei 9 primi numeri; questi cubi sono: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

La conoscenza di questi cubi permette di trovare mentalmente, dato un numero minore di 1000, la sua radice cubica a meno di un'unità.

Esempio. *La* radice cubica di 613 è 8, giacchè il più gran cubo intero che vi sia contenuto è 512.

Quando un numero è maggiore di 1000, la sua radice cubica a meno di una unità ha più di una cifra. Il metodo che si usa per trovarla si fonda sui due seguenti teoremi.

312. Teorema III. *La radice cubica di un numero* N, *maggiore di* 1000, *contiene precisamente tante diecine, quante unità sono nella radice cubica del numero delle sue migliaia.*

Se indichiamo con x il numero delle diecine di $\sqrt[3]{N}$, $\sqrt[3]{N}$ è compresa tra $x \times 10$ ed $(x+1) \times 10$; dunque, inalzando a cubo questi numeri, N è compreso tra il cubo di $x \times 10$, o $x^3 \times 10^3$, e il cubo di $(x+1) \times 10$, o $(x+1)^3 \times 10^3$, cioè a dire tra $x^3 \times 1000$ e $(x+1)^3 \times 1000$. Per conseguenza N è compreso fra x^3 migliaia ed $(x+1)^3$ migliaia, e perciò il numero delle migliaia di N è compreso tra x^3 e $(x+1)^3$; o, in altri termini, x^3 è il maggior cubo intero contenuto nelle migliaia di N, ed x è la radice di questo maggior cubo.

313. Osservazione. Il numero delle diecine contenute nella radice cubica di un numero intero, è, per ciò che precede, la radice cubica a meno di una unità del numero ottenuto sopprimendo le sue tre ultime cifre; il numero delle diecine contenute in questa nuova radice è, per la medesima ragione, la radice cubica del numero ottenuto sopprimendo tre nuove cifre; cancellando ancora tre cifre, la radice cubica del numero che resta sarà il numero delle diecine contenute nelle diecine di diecine, e così di seguito. Ma le diecine di diecine sono centinaia, le diecine di centinaia sono migliaia ecc.; per conseguenza:

Il numero delle diecine contenute nella radice cu-

bica di un numero intero è la radice cubica del numero, che si ottiene, sopprimendo le sue ultime tre cifre.

Il numero delle centinaia contenute nella radice cubica di un numero intero è la radice cubica del numero, che si ottiene, sopprimendo le sue ultime sei cifre.

Il numero delle migliaia contenute nella radice cubica di un numero intero è la radice cubica del numero, che si ottiene, sopprimendo le sue ultime nove cifre, ecc.

314. Teorema IV. *Togliendo da un numero intero il cubo delle diecine della sua radice, e dividendo il numero delle centinaia del resto per il triplo del quadrato del numero delle diecine della radice, si ottiene un quoziente superiore o eguale alla cifra delle sue unità.*

Supponiamo, per esempio, che la radice cubica di N contenga a diecine e b unità. La parte intera di $\sqrt[3]{N}$ è $a \times 10 + b$; per conseguenza, N è *almeno* eguale ad $(a \times 10 + b)^3$, cioè (**296**) *almeno* eguale ad $a^3 \times 1000 + 3 \times a^2 \times b \times 100 + 3 \times a \times b^2 \times 10 + b^3$. Dunque togliendo da N il cubo delle diecine della sua radice, cioè $a^3 \times 1000$, il resto $N - a^3 \times 1000$, che indicheremo con R, sarà *almeno* eguale a

$$3 \times a^2 \times b \times 100 + 3 \times a \times b^2 \times 10 + b^3$$

e conterrà *almeno* $3 \times a^2 \times b$ centinaia. Da ciò segue che, dividendo per $3 \times a^2$ questo numero delle centinaia di R, si troverà per quoziente *almeno* $\dfrac{3 \times a^2 \times b}{3 \times a^2} = b$, ossia un quoziente eguale o superiore a b.

315. Osservazione. Per determinare il valore esatto della cifra delle unità, bisogna provare successivamente il limite dato dal teorema precedente, se è minore di dieci, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. Queste prove consistono nel formare il cubo

della radice presunta: se questo cubo è contenuto nel numero proposto, la cifra provata è esatta; altrimenti bisogna diminuirla.

Regola generale per l'estrazione della radice cubica

316. I teoremi precedenti riducono l'estrazione della radice cubica di un numero intero a quella di un numero che ha tre cifre di meno. Applicando lo stesso metodo, l'estrazione della radice di questo numero si ridurrà a quella di un altro numero ancora più semplice, e così di seguito, sino a che si pervenga ad un numero di una, due o tre cifre di cui (**311**) si scorga immediatamente la radice.

Si ha quindi la regola seguente:

1° *Per estrarre la radice cubica di un numero intero a meno di un'unità, si divide il numero dato in classi di tre cifre, cominciando dalla destra: il numero di queste classi, di cui l'ultima può contenere solamente una o due cifre, è eguale a quello delle cifre della radice.*

Se infatti vi sono n classi, il numero proposto ha $3n$ o $3n-1$ o $3n-2$ cifre, e allora la sua radice cubica (**310**) ha n cifre.

2° *La prima cifra della radice è la radice cubica a meno di un'unità del numero espresso dall'ultima classe.*

Consideriamo, per esempio, il numero 83117451342, al quale riferiremo, per fissare le idee, tutte le spiegazioni che seguiranno. Il numero delle diecine della sua radice cubica è (**312**) la radice cubica a meno di una unità di 83117451; il numero delle sue centinaia è (**313**) la radice cubica, a meno di una unità, di 83117, e il numero delle sue migliaia (**313**) è la radice cubica

a meno di una unità di 83. Ora, 83 è precisamente la prima classe a sinistra del numero proposto; dunque la seconda parte della regola è dimostrata, e la radice cubica a meno di un'unità di 83, cioè 4, è la prima cifra della radice cercata.

3° *Dopo avere ottenuto questa prima cifra, se ne forma il cubo e si toglie dal numero espresso dalla prima classe; a destra del resto si scrivono le tre cifre che formano la seconda classe, e si divide il numero delle centinaia del numero R, così ottenuto, pel triplo del quadrato della prima cifra della radice. Il quoziente è eguale o superiore alla seconda cifra.*

Il numero delle centinaia contenute nella radice cercata è, infatti, la radice cubica a meno di una unità di 83117. Per trovare il numero di queste centinaia, cioè le due prime cifre della radice cercata, basta dunque estrarre la radice cubica di 83117, della quale già si conosce la cifra delle diecine 4. A tale effetto, basta (**314**) togliere da 83117 il cubo delle 4 diecine della sua radice, e dividere le centinaia del resto per il triplo del quadrato di 4; si ottiene così la cifra delle unità, o una cifra maggiore.

Il cubo di 4 diecine è 64000, che tolto da 83117 lascia per resto 19117. Dividendo 191 per 48, triplo del quadrato di 4, il quoziente è 3. Dunque la cifra delle unità della radice di 83117, cioè la seconda cifra della radice cercata, non può superare 3.

4° *Si determina il valore esatto di questa seconda cifra, provando successivamente il quoziente trovato, se è minore di 10, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori; per far ciò si scrive la cifra da provare alla destra della prima cifra della radice; si fa il cubo del numero così ottenuto; se questo cubo può togliersi dal numero formato dalle due prime classi, la cifra pro-*

vata è esatta, altrimenti bisogna provare la cifra inferiore di una unità.

Poichè la radice cubica di 83117 è tutt' al più eguale a 43, se si verifica che 43 non è maggiore di questa radice, deve esserle evidentemente eguale. Ora si fa questo appunto, quando si forma il cubo di 43 e si osserva se può togliersi da 83117.

Il cubo di 43 è 79507, che tolto da 83117, dà per resto 3610. La cifra 3 è dunque esatta.

5º *Alla destra del resto così ottenuto, si scrivono le tre cifre della terza classe, e si dividono le centinaia del numero così formato per il triplo del quadrato del numero formato dall' insieme delle due prime cifre della radice: il quoziente è maggiore della terza cifra o eguale ad essa.*

Il numero delle diecine contenute nella radice è, infatti (**312**), la radice cubica a meno di una unità di 83117451. Per trovare questo numero di diecine, cioè le tre prime cifre della radice, basta dunque estrarre la radice cubica di 83117451, di cui già si conosce il numero delle diecine 43. A quest' effetto, basta togliere da 83117451 il cubo delle 43 diecine della sua radice, e dividere le centinaia del resto per il triplo del quadrato di queste diecine; si ottiene così (**314**) per quoziente la cifra delle unità, o una cifra maggiore.

L' eccesso di 83117451 sul cubo delle 43 diecine è 3610451: dividendo 36104 per 5547 triplo del quadrato di 43, si ottiene 6 per quoziente. La terza cifra della radice è minore o al più eguale a 6.

6º *Il valore esatto di questa terza cifra si determina, provando successivamente il quoziente trovato, se è minore di 10, e i numeri di una cifra che gli sono inferiori. A tal fine si scrive la cifra da provare alla destra del numero formato dall' insieme delle due prime*

cifre della radice, e si forma il cubo del numero così ottenuto. Se questo cubo può togliersi dal numero formato dall'insieme delle tre prime classi, la cifra provata è esatta, altrimenti bisogna diminuirla di una unità e provarla di nuovo.

Infatti, la radice cubica a meno di un'unità di 83117451 essendo, in conseguenza di ciò che si è detto innanzi, tutto al più eguale a 436, se verifichiamo che 436 non è maggiore di questa radice, le sarà necessariamente eguale. Ora, quando si forma il cubo di 436, e si guarda se può togliersi da 83117451, si fa per l'appunto questa verificazione.

Il cubo di 436 è 82881856, che può togliersi da 83117451; il resto è 235595.

La cifra 6 è dunque esatta.

7° *Trovata la terza cifra, un processo affatto simile fornisce la quarta, la quinta* ecc.

Ciò non ha bisogno di spiegazione. Nel caso attuale, per determinare la quarta cifra della radice, alla destra del resto 235595, si scriverà la classe seguente 342, formando così il numero 235595342, e si dividerà il numero delle sue centinaia 2355953 pel triplo del quadrato di 436 che è 570288: il quoziente è 4, e per conseguenza (**314**) l'ultima cifra della radice non può essere maggiore di 4. Il cubo di 4364 è 83110180544, che può togliersi da 83117451342, e lascia per resto 7270798; la cifra 4 è dunque esatta; la radice cubica di 83117451342 a meno di un'unità è, per conseguenza, 4364 ed il resto 7270798; si ha quindi:

$$83117451342 = (4364)^3 + 7270798,$$

317. I calcoli si dispongono ordinariamente nel modo seguente:

83.117.451.342	4364
19 117	48
3 610 451	5547
235 595 342	570288
7 270 798	

Oltre i calcoli indicati, è stato necessario formare successivamente il cubo di 43, quello di 436 e quello di 4364. Questi calcoli si fanno a parte, e si scrive solo il resultato delle sottrazioni, che ci fanno conoscere se le cifre trovate sono esatte.

318. Osservazione I. Se il numero formato dal resto e dalla prima cifra della classe seguente non è divisibile per il triplo quadrato delle cifre ottenute nella radice, si scriverà zero nella radice, e si porrà subito il gruppo successivo di cifre alla destra del numero già considerato.

319. Osservazione II. Tutte le volte che si è sicuri che una cifra della radice non può essere minore di una certa cifra si potrà agevolmente verificare, se può esser maggiore, mediante il seguente

Teorema V. *Il resto ottenuto nell' estrazione di una radice cubica non può mai superare il triplo del quadrato della radice, più il triplo della radice.*

Siano, infatti, N un numero intero, R la sua radice cubica a meno di un' unità; il resto dell' operazione è $N - R^3$. Questa differenza è minore di $3R^2 + 3R + 1$, perchè, se fosse

$$N - R^3 \geqq 3 \times R^2 + 3 \times R + 1,$$

si avrebbe anche, aggiungendo R^3 ad ambedue i membri di questa diseguaglianza,

$$N \geqq R^3 + 3 \times R^2 + 3 \times R + 1,$$

cioè (296)

$$N \geqq (R+1)^3;$$

e quindi, essendo N almeno eguale ad $(R+1)^3$, la sua radice sarebbe almeno eguale ad $R+1$.

320*. Osservazione III. Il metodo, che abbiamo esposto per l'estrazione della radice cubica di un numero, mostra che, per ogni nuova cifra della radice, bisogna formare il cubo del numero ottenuto e il triplo quadrato di esso; in guisa che l'operazione riesce tanto più penosa quanto più si procede innanzi. Non sarà quindi inutile dire come i calcoli si possono rendere di gran lunga più facili. Sia a il numero già ottenuto nella radice, e b la nuova cifra trovata; i due numeri, che abbisognano per proseguire l'operazione, sono $(10a+b)^3$ e $3(10a+b)^2$. Il calcolo si disporrà nel modo seguente:

$$\begin{array}{rrrr}
10^3 \,.\, a^3, & 10^2 \,.\, 3a^2, & 10 \,.\, 3a, & 1 \\
+\,10^2 \,.\, 3a^2b, & +\,10 \,.\, 3ab, & b & \\
+\,10 \,.\, 3ab^2, & +\,b^2, & & \\
+\,b^3, & & & \\
 & +\,10 \,.\, 3ab, & & \\
 & +\,2b^2, & 2b & \\
\hline
(10a+b)^3, & 3(10a+b)^2, & 3(10a+b), & 1
\end{array}$$

La prima linea contiene i termini del cubo $(10a+1)^3$, che sono già conosciuti; la seconda linea si ottiene

moltiplicando per b i termini della prima linea (escluso il primo), e per comodo di calcolo si scrivono i termini di un posto più innanzi verso la sinistra; nel modo stesso si ottiene la terza linea e poi la quarta. In seguito alla seconda colonna si aggiunge il secondo termine di essa ed il doppio del terzo; in fine alla terza colonna si aggiunge il doppio del secondo termine. Sommando i termini che si corrispondono in colonna verticale, si hanno i numeri che servono per il calcolo di un'altra cifra.

Esempio. Vogliasi estrarre la radice cubica dal numero 98841703094039. Il calcolo si disporrà come qui sotto:

98.841.703.094.039	46235
34 8	48
1 505 7	6348
230 575 0	640332
38 350 727 0	64116387
6 289 066 164	

Il calcolo dei cubi di 46, 462, ec., e i tripli quadrati degli stessi numeri, si calcoleranno nel modo che qui appresso si vede.

64000	4800	120	1
28800	720	6	
4320	36		
216			
	720		
	72	12	

97336000	634800	1380	1
1269600	2760	2	
5520	4		
8			
	2760		
	8	4	

98611128000	64033200	13860	1
192099600	41580	3	
124740	9		
27			
	41580		
	18	6	

98803352367000	6411638700	138690	1
32058193500	693450	5	
3467250	25		
125			
	693450		
	50	10	

98835414027875	6413025675	138705	1

Se vi fossero altre cifre, il calcolo continuerebbe al modo stesso senza aumento di difficoltà.

Calcolo delle radici cubiche con una data approssimazione

321. Le radici dei numeri, che non sono cubi perfetti, possono determinarsi con quella approssimazione che si vuole. Abbiasi un numero A, del quale si voglia trovare la radice cubica approssimata a meno di $\frac{1}{n}$; questo vuol dire, trovare il maggior numero di n^{esimi} contenuto in $\sqrt[3]{A}$, ossia il maggior multiplo di $\frac{1}{n}$ contenuto in $\sqrt[3]{A}$. Indicando con x questo numero di n^{esimi}, avremo la relazione,

$$\frac{x}{n} \leqq \sqrt[3]{A} < \frac{x+1}{n};$$

dunque essendo i tre numeri $\frac{x}{n}$, $\sqrt[3]{A}$ ed $\frac{x+1}{n}$ disposti per ordine di grandezza, anche fra i loro cubi sussisteranno le stesse relazioni, ed avremo

$$\frac{x^3}{n^3} \leqq A < \frac{(x+1)^3}{n^3}.$$

Queste relazioni rimarranno inalterate, moltiplicando tutti e tre i numeri per n^3; avremo allora:

$$x^3 \leqq A \times n^3 < (x+1)^3;$$

ed estraendo da tutti la radice cubica,

$$x \leqq \sqrt[3]{A \times n^3} < x+1.$$

Dunque, essendo $\sqrt[3]{A \times n^3}$ compresa fra x ed $x+1$, si vede subito che x è la radice cubica a meno di un'unità del prodotto $A \times n^3$: e i due valori $\frac{x}{n}$ ed $\frac{x+1}{n}$ differiscono dal vero valore di $\sqrt[3]{A}$ meno di $\frac{1}{n}$, uno per difetto, l'altro per eccesso.

Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

Per estrarre la radice cubica da un numero A *a meno di un numero dato* $\frac{1}{\text{n}}$, *bisogna estrarre la radice cubica a meno di un'unità dal prodotto* $\text{A} \times \text{n}^3$ *e dare al resultato per denominatore* n.

Esempio. Debbasi estrarre la radice cubica da $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$. Moltiplichiamo $\frac{73}{5}$ per 343 cubo di 7; il prodotto è $\frac{73 \times 343}{5}$, cioè $\frac{25039}{5}$ o $5007\,\frac{4}{5}$; la sua radice cubica a meno di una unità, che è la stessa di quella di 5007 (**309**), è 17; per conseguenza la radice cubica di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$ è $\frac{17}{7}$.

322. Osservazione. *Quando il denominatore di una frazione è un cubo perfetto* b^3, *per ottenere la sua radice cubica a meno di* $\frac{1}{b}$, *basta estrarre la radice cubica dal numeratore a meno di una unità e dare per denominatore al resultato* b. Infatti, per estrarre la radice cubica da $\frac{a}{b^3}$ a meno di $\frac{1}{b}$ bisogna moltiplicare $\frac{a}{b^3}$ per b^3, estrarre la radice cubica dal prodotto a a

meno di una unità, e dividere il risultato per b: la quale operazione è affatto identica a quella, che abbiamo indicata.

Quando si debba estrarre invece la radice cubica da una frazione, il cui denominatore non sia un cubo perfetto, si comincia dal renderlo tale, moltiplicando ambedue i termini della frazione per il quadrato del denominatore stesso: allora si ritorna nel caso precedente e si opera allo stesso modo.

Così, per estrarre la radice cubica da una frazione $\frac{a}{b}$ moltiplicheremo ambedue i termini per b^2 ed avremo $\frac{a \times b^2}{b^3}$: supposto allora che $\sqrt[3]{a \times b^2}$ sia compresa fra m ed $m+1$, la radice cubica di $\frac{a}{b}$ sarà **(322)** compresa fra $\frac{m}{b}$ ed $\frac{m+1}{b}$ ed approssimata quindi al vero a meno di $\frac{1}{b}$ per difetto o per eccesso.

Esempio. Debbasi estrarre la radice cubica da $\frac{73}{5}$; questa frazione è uguale a $\frac{73 \times 5^2}{5^3} = \frac{1825}{125}$; per avere la sua radice cubica a meno di $\frac{1}{5}$, basta dunque estrarre la radice cubica a meno di una unità di 1825, che è 12, e dividerla per 5; la radice cubica di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{5}$ è quindi $\frac{12}{5}$.

Talvolta, per rendere il denominatore di una frazione un cubo perfetto, si può fare uso di un moltiplicatore minore del quadrato del suo denominatore: ba-

sta, infatti, che tutti i suoi fattori primi acquistino (**303**) esponenti divisibili per 3, e ciò avverrà evidentemente, se si moltiplica il denominatore pel prodotto di tutti quelli fra i suoi fattori primi, il cui esponente è della forma $3n+2$, e pel quadrato di quelli, il cui esponente è della forma $3n+1$.

Abbiasi per esempio la frazione $\frac{197}{360}=\frac{197}{2^3\times3^2\times5}$. Per rendere il suo denominatore un cubo perfetto si moltiplicheranno i suoi due termini per 3×5^2, e diverrà $\frac{197\times3\times5^2}{2^3\times3^3\times5^3}=\frac{14775}{30^3}$. Per avere la sua radice cubica a meno di $\frac{1}{30}$ basta estrarre la radice cubica a meno di un' unità da 14775, che è 24, e dividerla per 30; dunque la radice cubica di $\frac{197}{360}$ a meno di $\frac{1}{30}$ è $\frac{24}{30}$.

Valutazione in decimali della radice cubica di un numero intero o frazionario

323. Consideriamo un numero N intero o frazionario, e supponiamo che si voglia valutare $\sqrt[3]{N}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$. Secondo la regola precedente, bisogna: 1° moltiplicare N pel cubo di 10^n, che è 10^{3n}; 2° estrarre a meno di una unità la radice cubica dal prodotto; 3° dividere il resultato per 10^n. Questa regola può essere enunciata in due modi diversi, secondo che si suppone N intero o frazionario.

1° *Per estrarre la radice cubica da un numero intero* N *a meno di* $\frac{1}{10^n}$ *si scrivono* 3n *zeri alla destra di*

N, *si estrae a meno di un' unità la radice cubica dal numero così formato, e si separano* n *cifre decimali alla destra del resultato.*

2° *Per estrarre la radice cubica da un numero frazionario a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *si valuta questo numero a meno di* $\frac{1}{10^{3n}}$, *si sopprime la virgola, poi si estrae la radice cubica a meno di un' unità dall' intero così ottenuto, e si separano* n *cifre decimali alla destra del resultato.*

Esempio 1°. Valutare $\sqrt[3]{2}$ a meno di $\frac{1}{10^2}$ o di 0,01.

I valori di $\sqrt[3]{2000000}$ a meno di una unità, sono 125 e 126; e quindi 1,25 e 1,26 sono i valori di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 0,01, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

2°. Valutare $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ a meno di $\frac{1}{10^3}$ o di 0,001. Il valore di $\frac{5}{7}$ a meno di $\frac{1}{10^9}$ è 0,714285714. I valori di $\sqrt[3]{714285714}$ a meno di un' unità sono 893 e 894; per conseguenza, 0,893 e 0,894 sono i valori di $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ a meno di 0,001, il primo per difetto, il secondo per eccesso.

3°. Valutare $\sqrt[3]{3,14}$ a meno di 0,1. Secondo la regola bisogna esprimere 3,14 con 3 decimali, il che si farà scrivendo uno zero alla destra di questo numero: sopprimendo poscia la virgola, si ha il numero 3140. I valori di $\sqrt[3]{3140}$ a meno di un' unità sono 14 e 15; per conseguenza, i valori di $\sqrt[3]{3,14}$ a meno di $\frac{1}{10}$ sono 1,4 e 1,5.

324. OSSERVAZIONE. Da ciò che si è detto innanzi si vede che, *per determinare la radice cubica di un numero a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *basta conoscere le* 3n *prime cifre decimali del suo valore in decimali;* quindi, se un numero ha più di $3n$ cifre decimali, basterà considerare le sole prime $3n$, e fare astrazione dalle altre.

Esercizî

I. Trovare le condizioni alle quali deve soddisfare un numero intero dato affinchè possa essere la differenza di due cubi consecutivi, e trovare questi due cubi.

II. a e b indicando due numeri qualunque, $a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6$ è maggiore o minore del cubo di $(a^2 + b^2)$?

III. La somma dei cubi dei primi n numeri interi è eguale al quadrato della somma di questi numeri.

IV. Se due numeri interi A e B hanno lo stesso numero di cifre, e più della metà delle loro cifre a sinistra di comune, si ha

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} < \frac{1}{3}.$$

V. La differenza fra un numero intero ed il suo cubo è il prodotto di tre numeri interi consecutivi, dei quali il medio è il numero considerato.

VI. Il cubo di qualunque numero intero rientra in una delle forme generali $9n$, $9n + 1$, o $9n - 1$, dove n è un numero intero qualunque.

VII. Qual'è la condizione necessaria e sufficiente perchè un numero sia al tempo stesso quadrato e cubo perfetto?

VIII. Determinare due numeri incogniti sapendo che la somma dei loro cubi è 1435328 e la differenza dei cubi stessi è 1084096.

IX. La somma de' cubi di tre numeri è 14407; il cubo del secondo supera quello del primo di 1216 unità e quello del terzo supera quello del secondo di 10439 unità. Trovare i tre numeri.

X. La differenza fra i cubi di due numeri interi consecutivi è 4219. Quali sono i due numeri?

XI. È stato comprato a L. 5, 25 al metro, un certo numero di metri di seta. Il quadrato del prezzo totale di compra moltiplicato per $\frac{7}{9}$ del prezzo stesso farebbe L. 1555848. Quanti metri di seta si son comprati?

XII. Si domanda il prezzo di 15 quintali di vino, se i $\frac{2}{3}$ del prezzo di ogni quintale, moltiplicati per i $\frac{4}{5}$ e per $\frac{1}{6}$ del prezzo stesso danno per prodotto L. 10203, 6672.

XIII. Qual'è quel numero, che sommato col suo cubo dà per resultato 13848?

XIV. Si ha un certo numero di dadi, che si vorrebbero sovrapporre in modo da formare un cubo. Mettendone un certo numero per fila ne avanzano 8, e mettendone uno di più per fila ne mancano 53. Quanti sono i dadi?

XV. Trovare tre numeri incogniti, sapendo che, se si moltiplica il quadrato del primo numero per il secondo numero, si ha per prodotto 768; se si moltiplica il quadrato del secondo per il terzo, si ha per prodotto 3024; e se si moltiplica il quadrato del terzo per il primo si ha 3528.

XVI. Ad un negoziante sono stati spediti dei bicchieri, che costano in tutti L. 480 e che sono racchiusi in un certo numero di casse. Il numero de' bicchieri contenuto in ciascuna cassa è il triplo del numero delle casse, e il prezzo, in centesimi, di ogni bicchiere è doppio del numero delle casse. Quanti sono i bicchieri e quante le casse.

NUMERI INCOMMENSURABILI

(Complemento dei due capitoli precedenti)

Generalità sui numeri incommensurabili

325. Se due grandezze sono multiple di una stessa terza grandezza, questa ultima è detta una *comune misura* delle due prime. Due grandezze sono *commensurabili* o *incommensurabili* fra loro, secondochè hanno o non hanno una comune misura. Se una grandezza ha una comune misura con l'unità, questa comune misura è eguale alla stessa unità o ad una parte aliquota dell'unità. Nel primo caso, la grandezza è misurata da un numero intero; nel secondo caso, è misurata da un numero frazionario. Reciprocamente, una grandezza misurata da un numero intero o da un numero frazionario è commensurabile con l'unità, giacchè essa è un multiplo dell'unità o di una sua parte aliquota.

326. Il numero che misura una grandezza incommensurabile con l'unità si definisce, dicendo che *è un numero maggiore dei numeri commensurabili, che misurano grandezze più piccole della grandezza data, e minore dei numeri commensurabili, che misurano grandezze maggiori della grandezza data.*

Un numero è detto *commensurabile* o *razionale*, se la grandezza di cui esprime la misura è commensurabile con l'unità; è detto *incommensurabile* o *irrazionale* nel caso contrario. Da ciò resulta che i numeri commensurabili sono i numeri interi e i numeri frazionari. Dei numeri incommensurabili abbiamo veduto esempi nei due capitoli precedenti; giacchè abbiamo veduto che, se un numero non è un quadrato o un cubo per-

fetto, la sua radice quadrata o cubica rappresenta una grandezza perfettamente determinata, che non ha comune misura con l'unità.

In questo paragrafo ci proponiamo di estendere ai numeri incommensurabili le operazioni dell'aritmetica, sinora esposte esclusivamente riguardo ai numeri commensurabili.

Addizione e sottrazione dei numeri incommensurabili

327. Aggiungere o sottrarre due numeri incommensurabili, significa trovare un numero che esprima la somma o la differenza delle grandezze rappresentate dai numeri proposti.

Moltiplicazione

328. Se il moltiplicatore è commensurabile, non vi ha alcuna modificazione da apportare alla definizione.

Esempio. Il prodotto di $\sqrt{2}$ per 7, è un numero che esprime una grandezza 7 volte maggiore di quella che è rappresentata $\sqrt{2}$. Il prodotto di $\sqrt{2}$ per $\frac{3}{4}$, è un numero esprimente una grandezza eguale ai tre quarti di quella rappresentata da $\sqrt{2}$.

Se il moltiplicatore è incommensurabile, è necessaria una nuova definizione. Chiameremo prodotto di un numero A per un numero incommensurabile B, un numero minore del prodotto di A per un numero qualunque commensurabile superiore a B, e maggiore del prodotto di A per un numero commensurabile qualunque minore di B.

Divisione

329. Dividere due numeri A e B l'uno per l'altro, significa trovare un terzo numero che moltiplicato pel divisore B, riproduca il dividendo A. Questa definizione si applica qualunque siano i numeri A e B, commensurabili o incommensurabili.

Radici quadrate e cubiche

330. La radice quadrata o cubica di un numero incommensurabile è un numero che, preso due o tre volte come fattore, dà un prodotto eguale al numero dato.

Osservazione. La sola operazione, che richiede una definizione veramente nuova, è quella della moltiplicazione: tutte le altre dipendono da essa.

Teoremi relativi ai numeri incommensurabili

331. Teorema. *Si possono sempre trovare due numeri commensurabili, aventi una differenza piccola quanto si vuole, e che comprendano tra essi un numero incommensurabile dato.*

Sia n un numero intero qualunque; se si considera la serie

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \text{ ecc.},$$

si vede che i suoi termini aumentano senza limite, e, poichè cominciano da 0, il numero dato, qualunque sia,

è necessariamente compreso tra due di essi consecutivi, $\frac{x}{n}$ e $\frac{x+1}{n}$, e si può prendere n abbastanza grande, perchè la loro differenza $\frac{1}{n}$ sia piccola quanto si vuole.

332. Osservazione I. In conseguenza del teorema precedente, ammetteremo come evidente che i teoremi seguenti, che sono stati dimostrati per numeri commensurabili qualunque, si applicano anche a numeri incommensurabili.

1° *In un prodotto di più fattori, si può mutare l'ordine dei fattori senza che resti alterato il valore del prodotto.*

2° *Per moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori, si può moltiplicarlo successivamente per questi diversi fattori.*

3° *Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei suoi fattori per questo numero.*

4° *Per moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, basta formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e quelli del moltiplicatore.*

5° *Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero basta dare per esponente a quel numero la somma degli esponenti dei fattori.*

6° *Per dividere due potenze di uno stesso numero, basta dare per esponente al numero la differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore.*

7° *Per elevare una potenza ad un'altra potenza basta dare per esponente alla base il prodotto del primo esponente pel secondo.*

8° *Per elevare un prodotto ad una potenza, basta elevare ciascun fattore a questa potenza.*

9° *I teoremi relativi al calcolo delle espressioni*

frazionarie della forma $\frac{a}{b}$ (**181**), *si applicano al caso in cui* a e b *indicano numeri incommensurabili.*

Osservazione II. I teoremi 7° e 8° sono stati dimostrati da noi nei due capitoli precedenti per la seconda e la terza potenza solamente; ma la dimostrazione essendo affatto identica per qualunque altra potenza, faremo a meno di darla.

CAPITOLO XIV

TEORIA DEI RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI

Rapporto di due grandezze

333. Il rapporto di una grandezza ad un' altra, ad essa omogenea, è il numero che servirebbe di misura alla prima, se la seconda fosse presa per unità di misura.

Il rapporto fra due grandezze dicesi commensurabile, quando esse hanno una comune misura contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse. In caso contrario il rapporto dicesi incommensurabile.

334. Teorema I. *Qualunque rapporto commensurabile è eguale ad una frazione a termini interi, i cui termini sono respettivamente i numeri, che esprimono quante volte una comune misura è contenuta nelle due grandezze date.*

Siano A e B le grandezze che si vogliono paragonare, le quali, per ipotesi, hanno una comune misura m, contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse, 5 volte, per esempio, nella prima, e 7 volte nella seconda. Allora, A essendo eguale a 5 volte m e B a 7 volte m, la comune misura m è $\frac{1}{7}$ di B ed è contenuta 5 volte in A; per conseguenza, $A = \frac{5}{7}$ di B: dunque il numero, che misura A, prendendo B per unità

di misura, è $\frac{5}{7}$, e perciò il rapporto fra A e B è, per definizione, eguale a $\frac{5}{7}$, il che si esprime scrivendo

$$\frac{A}{B}=\frac{5}{7},$$

che si legge A *sta a* B *come* 5 *sta a* 7.

Parimente m, essendo contenuta in A 5 volte, è $\frac{1}{5}$ di A e sta 7 volte in B, dunque $B=\frac{7}{5}$ di A e perciò il numero, che misura B, prendendo A per unità di misura, ossia, per definizione, il rapporto fra B ed A è $\frac{7}{5}$, e si scrive

$$\frac{B}{A}=\frac{7}{5},$$

che si legge B *sta ad* A *come* 7 *sta a* 5.

Da ciò che precede apparisce, che il rapporto fra due grandezze può considerarsi sotto due aspetti e dà luogo a due differenti frazioni formate dai medesimi termini, ma disposti in modo inverso, quali sono $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$. Questi due rapporti, o queste due diverse forme del rapporto fra due grandezze, si chiamano *rapporti inversi* o *reciproci*, e le frazioni che li rappresentano ricevono il nome di *frazioni inverse* o *reciproche*.

335. Osservazione. Il prodotto di due frazioni inverse è evidentemente l'unità; talvolta si dà questa proprietà come definizione, e si dice: due numeri sono

reciproci quando il loro prodotto è uguale all' unità. Ma noi preferiamo la prima definizione, che ha il vantaggio di fare avvertire l' origine della locuzione di cui si tratta.

336. Teorema II. *Se due grandezze omogenee sono incommensurabili fra loro, si possono trovare dei valori approssimati del loro rapporto, espressi da frazioni a termini interi, che differiscano dal vero valore del rapporto incommensurabile meno di una quantità arbitrariamente piccola.*

Siano A e B due grandezze omogenee incommensurabili fra loro; s'immagini divisa la grandezza B in n parti eguali e supponiamo che una di queste parti, cioè $\frac{1}{n}$ di B, sia contenuta in A un certo numero di volte. È chiaro che, comunque sia piccola una di queste parti, cioè per quanto sia grande il numero n delle parti, in cui è stata divisa la grandezza B, una qualunque di esse, cioè $\frac{1}{n}$ di B, non potrà mai essere contenuta esattamente in A, poichè in tal caso $\frac{1}{n}$ di B sarebbe una comune misura fra A e B. Ammettiamo quindi che $\frac{1}{n}$ di B sia contenuto in A più di m volte e meno di $m+1$; se $\frac{1}{n}$ di B fosse contenuto in A m volte esattamente, il rapporto fra A e B sarebbe espresso dalla frazione $\frac{m}{n}$; se $\frac{1}{n}$ di B fosse contenuto in A $m+1$ volte esattamente, il rapporto fra A e B sarebbe espresso dalla frazione $\frac{m+1}{n}$; ne viene che, essendo $\frac{1}{n}$ di B contenuto in A più di m volte e meno di $m+1$, il rap-

porto fra A e B sarà compreso fra le frazioni $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, e potremo scrivere

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

Ora è chiaro che, essendo $\frac{1}{n}$ la differenza fra le due frazioni $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, se per valore del rapporto $\frac{A}{B}$, che è compreso fra esse, si prende una delle frazioni $\frac{m}{n}$ od $\frac{m+1}{n}$, si commette un errore minore di $\frac{1}{n}$ per difetto o per eccesso. Quindi, prendendo il numero n, cioè il numero delle parti in cui s'immagina divisa la grandezza B sufficientemente grande, si può rendere quest'errore tanto piccolo quanto si vuole, ed il valore approssimato che si trova per il rapporto può esser tanto vicino al vero valore di questo quanto si vuole.

Rapporto di due numeri

337. Rapporto di due numeri interi o frazionari chiamasi il quoziente della loro divisione. È essenziale mostrare che questa definizione non contraddice a quella che abbiamo data innanzi, e che due grandezze della stessa specie rappresentate da numeri, hanno in fatti per rapporto il quoziente della divisione di questi numeri.

Supponiamo, per esempio, che due grandezze riferite ad una medesima unità, sieno rappresentate

da $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{3}$. La frazione $\frac{5}{7}$ divisa per $\frac{2}{3}$ dà per quoziente $\frac{15}{14}$; avremo quindi, per la proprietà fondamentale della divisione,

$$\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{15}{14}:$$

ma, per la definizione della moltiplicazione delle frazioni, si ha che moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{15}{14}$ vuol dire prendere $\frac{15}{14}$ di $\frac{2}{3}$; dunque si può scrivere

$$\frac{5}{7}=\frac{15}{14} \text{ di } \frac{2}{3}.$$

Ciò vuol dire che $\frac{5}{7}$ di unità sono i $\frac{15}{14}$ di $\frac{2}{3}$ di unità; ossia che il numero che misura la grandezza $\frac{5}{7}$ di unità per mezzo della grandezza $\frac{2}{3}$ di unità è $\frac{15}{14}$; dunque, per definizione, il *rapporto* della grandezza $\frac{5}{7}$ di unità alla grandezza $\frac{2}{3}$ di unità è $\frac{15}{14}$. Dunque le due definizioni si accordano perfettamente.

338*. Osservazione. Abbiamo veduto che il rapporto di due grandezze commensurabili fra loro, A e B, si riduce a quello di due numeri interi, cercando una comune misura m tra queste grandezze. È chiaro poi che, se m è la massima comune misura fra le date grandezze, il loro rapporto sarà ridotto alla sua più semplice espres-

sione. Quindi, allorchè le grandezze date sono espresse in numeri, il loro rapporto sarà ridotto alla sua più semplice espressione, cercando il massimo comun divisore di questi numeri, secondo i metodi esposti nel capitolo VI. Ma, se le due grandezze di cui si cerca la massima comune misura non fossero date in numeri, e si dovesse per esempio trovare il rapporto e quindi la massima comune misura fra due lunghezze date, allora l' operazione non potrebbe procedere come pei numeri; ma sarebbe facile sostituire la sottrazione ripetuta a ciascuna divisione voluta dalla regola. Si toglierà dunque la lunghezza minore dalla maggiore tante volte quante sarà possibile, cioè fino a trovare un resto minore della lunghezza minore, indi si toglierà anche ripetutamente il resto dalla lunghezza minore, poi si farà lo stesso del secondo resto rispetto al primo, e così di seguito, sino a che togliendo ripetutamente un resto dal precedente non vi sia più resto alcuno. Sarà facile calcolare quante volte l' ultimo resto, ossia la massima comune misura, è contenuta nella lunghezza minore e quante volte nella maggiore, e così queste lunghezze potranno essere rappresentate da due numeri interi, esprimenti ciascuno un aggregato di unità eguali alla lunghezza indicante la massima comune misura; quindi al rapporto delle due lunghezze proposte, potrà sostituirsi quello dei due numeri così ottenuti. Supponiamo, per esempio, che la lunghezza maggiore contenga 5 volte la minore più un resto R, la minore 3 volte R più un resto R', R 2 volte R' esattamente; sarà R' la massima comune misura. Ora R essendo doppia di R', la lunghezza minore che contiene 3 volte R più R', conterrà 7 volte R', cioè la massima comune misura; e la lunghezza maggiore, che contiene 5 volte la minore più R, conterrà 37 volte la massima comun misura R';

onde il rapporto fra la lunghezza minore e la lunghezza maggiore sarà eguale a quello dei numeri 7 e 37.

339*. Abbiamo già avvertito che un rapporto si chiama incommensurabile, quando non esiste una comune misura fra i suoi termini, ossia quando non può esprimersi il suo valore esattamente per mezzo di numeri interi o frazionari. Per esempio, il rapporto di $\sqrt{5}$ a 7 è incommensurabile, perchè, estraendo la radice quadrata da 5, quel rapporto si trasforma nell' altro di 2,23606798.... a 7, il quale rapporto dà origine ad infiniti rapporti diversi, secondo che si prende un maggior numero di cifre nella frazione decimale. Così, spezzandola dopo tre cifre, il rapporto sarà 2,236 a 7, ovvero $\frac{2236}{1000}$ a 7, che equivale al rapporto dei numeri interi 2236 a 7000; spezzandola alla quinta cifra, il rapporto sarà quello dei numeri 223606 a 700000, ec. Ma quantunque non possa assegnarsi in numeri commensurabili il valore del rapporto $\sqrt{5}$ a 7, sarà in nostro arbitrio di approssimarci ad esso quanto vorremo, prendendo sempre un maggior numero di cifre decimali, sino a che l' errore divenga tanto piccolo quanto si vuole. Si prendano sette cifre decimali, il rapporto sarà espresso dalla frazione $\frac{22360679}{70000000}$; se ne prendano otto, ed il rapporto sarà $\frac{223606798}{700000000}$, che non differisce dal precedente se non per $\frac{2}{700000000}$, e questa differenza già piccolissima diminuirebbe ancora, tenendo conto di un maggior numero di cifre decimali. Il rapporto di $\sqrt{5}$ a 7, ovvero la frazione $\frac{\sqrt{5}}{7}$ è dunque un limite, al quale continuamente si accostano, senza rag-

giungerlo mai, tutti i successivi rapporti che possono formarsi col numero decimale illimitato 2,236067.... e col numero 7, prendendo sempre un maggior numero di cifre decimali nel primo termine del rapporto.

Da quanto precede apparisce chiaramente che il valore di un rapporto incommensurabile dovrà sempre considerarsi come il quoziente di una divisione, con la differenza che, per le grandezze incommensurabili, esso non si potrà esprimere esattamente in numeri interi o frazionarî, ma con una approssimazione tanto grande quanto si vuole.

340. Da quel che precede apparisce che il modo di valutare in numeri il rapporto commensurabile o incommensurabile, che hanno l'una all'altra due quantità omogenee qualunque, è unicamente *di sottrarre la grandezza minore dalla maggiore quante volte è possibile, ed essendovi un resto, sottrarlo quanto volte si può dalla grandezza minore, indi togliere anche ripetutamente il secondo resto, se vi è, dal primo, e poi il terzo dal secondo, e così di seguito. Se le due grandezze proposte saranno fra loro commensurabili, l'operazione avrà un termine, e coi numeri esprimenti quante volte l'ultimo resto è contenuto nelle due quantità date si potrà formare una frazione ordinaria, che rappresenterà il valore esatto del rapporto cercato. Se le due grandezze saranno fra loro incommensurabili, l'operazione progredirà indefinitamente, ed allora si potrà ottenere una serie di frazioni, il cui valore andrà man mano accostandosi al rapporto numerico richiesto, sino a differirne di una quantità tanto piccola quanto si vuole.*

Definizioni delle proporzioni

341. Si dice che *quattro grandezze sono in proporzione, quando il rapporto delle due prime è eguale al rapporto delle altre due.*

In aritmetica, ove si considerano i soli numeri, si dice che *quattro numeri sono in proporzione, quando il rapporto dei due primi è eguale al rapporto degli altri due.*

Una proporzione è dunque *una eguaglianza tra due rapporti.*

È evidente che, se quattro numeri sono in proporzione, sarà lo stesso delle grandezze corrispondenti, e che reciprocamente, dalla proporzione tra quattro grandezze risulta quella dei numeri che le rappresentano.

Per rappresentare che quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione, si può scrivere

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

ovvero

$$a:b::c:d,$$

che si legge

a *sta a* b *come* c *sta a* d.

a, b, c, d si chiamano i *termini* della proporzione; $\frac{a}{b}$ è il primo rapporto, $\frac{c}{d}$ il secondo rapporto; b e c sono i *medi*, a e d gli *estremi*; a l'*antecedente* e b il *conseguente* del primo rapporto; c l'*antecedente* e d il *conseguente* del secondo rapporto.

342. Quando in una proporzione i medi sono eguali tra loro si dice che il numero a cui sono eguali è *me-*

dio proporzionale tra gli estremi; e la proporzione prende il nome di *proporzione continua.*

Esempio. Si ha

$$8 : 4 :: 4 : 2;$$

4 è dunque medio proporzionale tra 8 e 2. La proporzione continua si scrive ancora più brevemente

$$\div 8 : 4 : 2$$

e si legge al modo solito.

343*. Da ciò che si è detto di sopra sui rapporti delle quantità incommensurabili fra loro, risulta che una proporzione contenente queste quantità deve pure considerarsi come l'eguaglianza di due quozienti, ossia di due frazioni, quantunque non se ne possano esprimere esattamente i valori in numeri interi o frazionarî; e dal modo di valutare in numeri il rapporto di due grandezze qualunque si può inoltre dedurre un criterio generale per conoscere quando quattro grandezze sono proporzionali. Se le frazioni approssimate, ottenute cercando i valori approssimati del rapporto delle prime due grandezze fra loro, e delle seconde fra loro, riescono identiche in tutti i casi, cioè qualunque sia l'approssimazione, le quattro grandezze saranno in proporzione.

Questo criterio, senza nascondere la natura delle quantità irrazionali, mostra la possibilità dell'eguaglianza di due rapporti incommensurabili; perciocchè tali rapporti sono *limiti* di due frazioni perfettamente eguali fra loro, per quanto grande sia il loro denominatore comune, ed inoltre quelle frazioni si accostano sempre al crescere del denominatore al valore che rappresentano, fino a differirne di una quantità

assolutamente trascurabile (**339**). Ma qualche volta i rapporti fra quantità incommensurabili sono commensurabili, cioè il quoziente di una quantità irrazionale per un'altra pure irrazionale può assegnarsi in numeri interi o frazionari; e ciò conferma maggiormente che quelle quantità non fanno eccezione alla regola generale in quanto si riferisce alla determinazione del loro rapporto. Per esempio i rapporti $\sqrt{12} : \sqrt{3}$, e $\sqrt{45} : \sqrt{5}$, posti sotto forma di frazioni, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$, sono eguali a $\sqrt{\frac{12}{3}}$ e $\sqrt{\frac{45}{5}}$; (*a*) e poichè $\frac{12}{3}$ e $\frac{45}{5}$ equivalgono a $\frac{4}{1}$ e $\frac{9}{1}$ i due rapporti si cambiano in $\sqrt{\frac{4}{1}}, \sqrt{\frac{9}{1}}$, ovvero $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}$. Dimodochè, se si avesse la proporzione

$$\sqrt{12} : \sqrt{3} : : 2 \times \sqrt{45} : 3 \times \sqrt{5},$$

essa potrebbe ridursi ad una proporzione fra numeri interi: infatti la prima ragione $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ è uguale a $\frac{2}{1}$, e la seconda ragione $\frac{2 \times \sqrt{45}}{3 \times \sqrt{5}}$, equivalente a $\frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{45}{5}}$,

---

(*a*) Si prova facilmente che $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}}$, perchè, inalzando a quadrato ambedue i membri di questa eguaglianza, si ha dal primo $\frac{(\sqrt{12})^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{12}{3}$; e dal secondo $\left(\sqrt{\frac{12}{3}}\right)^2 = \frac{12}{3}$; si hanno dunque, effettuando la stessa operazione sulle due quantità, resultati eguali, e quindi le quantità stesse sono eguali. In modo analogo si prova che $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}}$.

vale $\frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{3}$; onde la data proporzione si cambia nell' altra, $2 : 1 :: 6 : 3$.

Nell' esporre dunque le proprietà generali delle proporzioni geometriche, noi prescinderemo da ogni distinzione sulla natura delle quantità, che ne formano il soggetto, e ciò che diremo si applicherà tanto alle grandezze commensurabili quanto alle incommensurabili.

Teoremi relativi alle proporzioni

344. Teorema. I. *In qualunque proporzione il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medi.*

Abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : d,$$

o, ciò ch' è lo stesso,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \qquad (1)$$

Se si moltiplicano i due termini della prima espressione per d, e quelli della seconda per b, affine di ridurre le due frazioni allo stesso denominatore, l' eguaglianza (1) diverrà

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

Queste due frazioni, essendo eguali ed avendo lo stesso denominatore, devono pure avere i numeratori eguali, e, per conseguenza,

$$a \times d = c \times b;$$

ciò che bisognava dimostrare.

345. Osservazione. Questo teorema dà il modo di trovare un termine di una proporzione, di cui si conoscono gli altri tre.

Infatti, poichè il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medi, se il termine ignoto è un estremo, moltiplicato per l'altro estremo deve dare un prodotto eguale a quello dei medi; esso è dunque eguale al prodotto dei medi diviso per l'estremo noto. Se il termine incognito è un medio, si vede analogamente che è eguale al prodotto degli estremi diviso pel medio noto.

Esempio. Trovare un numero x tale che si abbia la proporzione

$$3 : 7 :: 5 : x.$$

Per il teorema dimostrato si deve avere

$$x \times 3 = 7 \times 5;$$

e quindi

$$x = \frac{7 \times 5}{3} = \frac{35}{3} = 11\,\frac{2}{3}.$$

Se la proporzione è continua ed è incognito un estremo, per esempio, se si ha:

$$a : b :: b : x$$

si ottiene

$$x \times a = b \times b$$

e quindi

$$x = \frac{b^2}{a};$$

dunque, in una proporzione continua un estremo incognito è eguale al quadrato del medio diviso per l'estremo cognito.

Se invece, essendo la proporzione continua, è incognito il medio, come, per esempio,

$$a : x :: x : b$$

si avrà

$$x \times x = a \times b;$$

ossia

$$x^2 = a \times b, \text{ da cui } x = \sqrt{a \times b};$$

dunque, il medio proporzionale fra due numeri si ottiene estraendo la radice quadrata dal loro prodotto.

346. Teorema II. — *Se il prodotto di due numeri è eguale al prodotto di altri due, i quattro numeri presi in ordine conveniente formano una proporzione.*

Supponiamo che si abbia

$$a \times d = b \times c.$$

Dividiamo per $b \times d$ i due membri di questa eguaglianza; avremo

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}.$$

Sopprimendo il fattore d comune ai due termini della prima frazione, e il fattore b comune ai due termini della seconda, avremo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

347. Osservazione I. — I due teoremi precedenti si possono riunire in un solo, sotto il seguente enunciato. *Condizione necessaria e sufficiente, perchè quattro numeri formino una proporzione, è che il prodotto di due di essi sia eguale al prodotto degli altri due.*

Osservazione II. Dai teoremi precedenti resulta che in una proporzione si posson fare tutte quelle tra-

sformazioni, che non alterano l'eguaglianza fra il prodotto degli estremi e quello dei medi. In particolare si posson fare dei cambiamenti di posto nei termini cioè: 1° Permutare fra loro i medi o gli estremi 2° Porre i medi in luogo degli estremi, e reciprocamente. Così, la proporzione che ha luogo fra quattro numeri a, b, c, d, tali che $a \times d = b \times c$, può essere scritta negli otto seguenti modi:

$$
\begin{array}{l}
a : b :: c : d, \\
a : c :: b : d, \\
b : a :: d : c, \\
b : d :: a : c, \\
c : a :: d : b, \\
c : d :: a : b. \\
d : b :: c : a, \\
d : c :: b : a,
\end{array}
$$

$a : b = c : d$

348. Teorema III. *In una proporzione si può moltiplicare o dividere uno dei suoi estremi e uno dei suoi medi per uno stesso numero.*

Infatti è evidente che, operando a questo modo, si moltiplica o si divide per uno stesso numero il prodotto degli estremi e quello dei medi, il che non altera la loro eguaglianza e quindi la proporzione continua a sussistere.

349. Teorema IV. *Se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formano una proporzione.*

Si abbiano le due proporzioni

$$
\begin{array}{l}
a : b :: c : d, \\
e : f :: c : d.
\end{array}
$$

Esse esprimono che i due rapporti $a : b$ ed $e : f$ sono ambedue eguali al rapporto $c : d$ e quindi sono eguali fra loro; e perciò si ha l'altra proporzione

$$a : b :: e : f.$$

350. Teorema V. *Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti sono in proporzione. Se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti sono in proporzione.*

Abbiansi le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a : e :: c : f,$$

che hanno gli stessi antecedenti. Permutando fra loro i medi, si ha

$$a : c :: b : d,$$
$$a : c :: e : f;$$

e, pel teorema precedente,

$$b : d :: e : f.$$

Analogamente si dimostra la seconda parte del teorema.

351. Teorema VI. *Se due proporzioni hanno gli stessi estremi, il rapporto dei conseguenti è eguale al rapporto inverso degli antecedenti. Se due proporzioni hanno gli stessi medi, il rapporto degli antecedenti è eguale al rapporto inverso dei conseguenti.*

Siano le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a : e :: f : d,$$

che hanno gli stessi estremi. Dalla prima proporzione si ha $a \times d = b \times c$, e dalla seconda $a \times d = e \times f$; quindi

$$b \times c = e \times f,$$

e perciò si ha pure (**346**) $\frac{b}{e}=\frac{f}{c}$. Analogamente si dimostra l'altra parte del teorema.

352. Teorema VII. *In qualunque proporzione la somma dei due primi termini sta al secondo come la somma dei due ultimi sta al quarto.*

Abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : d,$$

o, ciò ch'è lo stesso,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Aggiungendo l'unità ai due membri di questa eguaglianza, si ha

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

ovvero, riducendo a frazione impropria i due numeri misti, che formano i due membri dell'eguaglianza,

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

o, ciò ch'è lo stesso,

$$a+b : b :: c+d : d.$$

353. Osservazione. Confrontando questa proporzione con quella data

$$a : b :: c : d,$$

si vede che hanno gli stessi conseguenti e perciò (**350**) gli antecedenti sono in proporzione, e si ha

$$a : a+b :: c : c+d,$$

cioè che *in qualunque proporzione il primo termine sta alla somma dei due primi come il terzo sta alla somma dei due ultimi.*

354. Teorema VIII. *In qualunque proporzione, la differenza dei due primi termini sta al secondo, come la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

$$a : b :: c : d,$$

ovvero

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Togliendo l'unità dai due membri di questa eguaglianza, si ha

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1,$$

ovvero, riducendo, come precedentemente, i due membri ad una sola frazione,

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{d},$$

ossia

$$a-b : b :: c-d : d.$$

Osservazione. La proporzione precedente suppone evidentemente che a e c siano maggiori di b e d. Se ciò non fosse, ponendo i medi in luogo degli estremi si otterrebbe una nuova proporzione $b : a :: d : c$, alla quale sarebbe applicabile il teorema.

355. Teorema IX. *In qualunque proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

Sia data la proporzione

$$a : b :: c : d;$$

permutando i medi e scrivendo

$$a : c :: b : d,$$

se a questa si applicano i teoremi VII e VIII si trova

$$a+c : c :: b+d : d$$
$$a-c : c :: b-d : d;$$

permutando di nuovo i medi, queste ultime due proporzioni doventano

$$a+c : b+d :: c : d$$
$$a-c : b-d :: c : d.$$

OSSERVAZIONE. La seconda di queste proporzioni suppone evidentemente che a sia maggiore di c, e per conseguenza b maggiore di d; se ciò non si verifica, invece della proporzione $a : b :: c : d$, si scriverebbe

$$b : a :: d : c,$$

e la medesima dimostrazione darebbe

$$b-d : a-c :: d : c.$$

356. TEOREMA X. *In qualunque proporzione la somma dei due primi termini sta alla loro differenza come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.*

Abbiamo provato nei teoremi VII e VIII che da una proporzione qualunque

$$a : b :: c : d,$$

si deducono le due seguenti:

$$a+b : b :: c+d : d,$$
$$a-b : b :: c-d : d;$$

le quali, avendo gli stessi conseguenti danno (**350**)

$$a+b : c+d :: a-b : c-d$$

ovvero, permutando i medi,

$$a+b : a-b :: c+d : c-d.$$

357. Osservazione. Permutando i medi della proporzione proposta e scrivendo

$$a : c :: b : d,$$

il teorema ora dimostrato darebbe

$$a+c : a-c :: b+d : b-d,$$

cioè *che in una proporzione qualunque, la somma degli antecedenti sta alla loro differenza come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

358. Teorema XI. *Dato un numero qualunque di proporzioni il prodotto de' primi antecedenti sta al prodotto de' primi conseguenti come il prodotto dei secondi antecedenti sta al prodotto dei secondi conseguenti.*

Questo si suole esprimere più brevemente dicendo: *moltiplicando termine a termine più proporzioni si forma una nuova proporzione.*

Se si hanno le proporzioni

$$a_1 : b_1 :: c_1 : d_1 \qquad\qquad \frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1},$$

$$a_2 : b_2 :: c_2 : d_2 \quad \text{esse si posson mettere sotto la forma} \quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{c_2}{d_2},$$

$$a_3 : b_3 :: c_3 : d_3 \qquad\qquad \frac{a_3}{b_3}=\frac{c_3}{d_3}.$$

Il prodotto dei tre primi membri di quest'ultime eguaglianze è certamente eguale al prodotto dei tre secondi, cioè

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} = \frac{c_1}{d_1} \times \frac{c_2}{d_2} \times \frac{c_3}{d_3}$$

ossia

$$\frac{a_1 \times a_2 \times a_3}{b_1 \times b_2 \times b_3} = \frac{c_1 \times c_2 \times c_3}{d_1 \times d_2 \times d_3}$$

e questa è precisamente la proporzione cercata, cioè

$$a_1 \times a_2 \times a_3 : b_1 \times b_2 \times b_3 :: c_1 \times c_2 \times c_3 : d_1 \times d_2 \times d_3 .$$

359. **Osservazione.** Dal teorema precedente resulta come conseguenza immediata che, *se quattro numeri sono in proporzione, anche le loro potenze dello stesso grado sono in proporzione.*

Infatti, se, data la proporzione,

$$a : b :: c : d,$$

si considerano, per esempio, le tre proporzioni identiche

$$\begin{aligned} a &: b :: c : d \\ a &: b :: c : d \\ a &: b :: c : d, \end{aligned}$$

applicando il teorema dimostrato, si ha

$$a \times a \times a : b \times b \times b :: c \times c \times c : d \times d \times d$$

ossia

$$a^3 : b^3 :: c^3 : d^3;$$

e così per qualunque altra potenza.

360. **Teorema XII.** *Date due proporzioni, il quoziente dei primi antecedenti sta a quello dei primi conseguenti come il quoziente dei secondi antecedenti sta*

a quello dei secondi conseguenti. Questo si esprime più brevemente sotto l'altra forma, che, *dividendo termine a termine due proporzioni si ottiene una nuova proporzione.*

Si abbiano le due proporzioni

$$a_1 : b_1 :: c_1 : d_1$$
$$a_2 : b_2 :: c_2 : d_2 .$$

Dalla prima si ha, per il teorema I,

$$a_1 \times d_1 = b_1 \times c_1 ,$$

e dalla seconda

$$a_2 \times d_2 = b_2 \times c_2 .$$

Dividendo i primi membri di queste due eguaglianze fra loro ed i secondi fra loro, i quozienti debbono essere eguali, dunque avremo

$$\frac{a_1 \times d_1}{a_2 \times d_2} = \frac{b_1 \times c_1}{b_2 \times c_2},$$

che può scriversi

$$\frac{a_1}{a_2} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2} \times \frac{c_1}{c_2} .$$

Allora, per il teorema II, i quattro numeri $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{d_1}{d_2}$ formano una proporzione e si ha:

$$\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} :: \frac{c_1}{c_2} : \frac{d_1}{d_2} .$$

361. TEOREMA XIII. *Se quattro numeri sono in proporzione, le loro radici quadrate o cubiche sono anche in proporzione.*

Abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : d, \quad \text{ovvero} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Estraendo la radice quadrata o cubica da ciascun membro, si ha

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{c}{d}} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$$

Ora $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, perchè inalzando ambedue queste quantità alla seconda potenza, si ha dalla prima $\frac{a}{b}$ e dalla seconda pure $\frac{a}{b}$, ossia resultati eguali. Per la stessa ragione $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $\sqrt{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$ e $\sqrt[3]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}$.

Dunque potremo scrivere

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}},$$

che, messe sotto forma di proporzione, danno

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}.$$

Osservazione. Il teorema è vero anche in generale per radici di grado qualunque, ma noi non ne te-

niamo conto, non avendo precedentemente trattato di queste radici.

362. Teorema XIV. *In una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

Consideriamo una serie di rapporti eguali

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h;$$

dall' eguaglianza de' due primi rapporti, ossia dalla proporzione

$$a : b :: c : d$$

si deduce, per il teorema IX,

$$a + c : b + d :: c : d.$$

Sostituendo al rapporto $c : d$ il rapporto eguale $e : f$, si ottiene

$$a + c : b + d :: e : f,$$

da cui si deduce, sempre per il solito teorema IX,

$$a + c + e : b + d + f :: e : f.$$

Sostituendo al rapporto $e : f$ il rapporto uguale $g : h$, si ottiene

$$a + c + e : b + d + f :: g : h,$$

da cui si deduce ancora

$$a + c + e + g : b + d + f + h :: g : h;$$

ciò che bisognava dimostrare.

Proporzioni aritmetiche o equidifferenze

363*. Due grandezze qualunque dello stesso genere possono paragonarsi fra loro in due diversi modi 1° *osservando di quanto una supera l'altra*; 2° *osservando quante volte una è contenuta nell'altra*, o, più generalmente, *qual parte una è dell'altra*. Questo secondo modo di paragone forma il rapporto geometrico, di cui abbiamo già parlato; il primo modo dà idea del *rapporto aritmetico*, che è quindi la differenza fra due grandezze. Quattro grandezze a, b, c, d, tali che la differenza fra la prima e la seconda sia eguale alla differenza fra la terza e la quarta, costituiscono una *proporzione aritmetica* o *equidifferenza*. Quindi una proporzione aritmetica non è altro che l'*eguaglianza di due rapporti aritmetici*.

La proporzione aritmetica fra quattro grandezze a, b, c, d si scrive

$$a \,.\, b \,:\, c \,.\, d, \text{ o } a - b = c - d,$$

ed i termini prendono gli stessi nomi che nelle proporzioni geometriche.

364*. Teorema I. *In qualunque proporzione aritmetica la somma degli estremi è eguale a quella dei medi.*

Abbiasi la proporzione aritmetica

$$a \,.\, b \,:\, c \,.\, d \,: \text{ o } a - b = c - d.$$

Da questa eguaglianza si deduce, aggiungendo ad ambedue i membri $b + d$,

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

ossia

$$a + d = b + c.$$

365.* OSSERVAZIONE. Se la proporzione è continua, cioè se si ha

$$a \,.\, b \,\dot{:}\, b \,.\, c,$$

sarà

$$b \times 2 = a + c \text{ e perciò } b = \frac{a+c}{2}:$$

b si chiama il *medio aritmetico* delle due quantità a e c.

Per analogia si chiama *medio aritmetico* di più quantità la somma delle medesime divisa per il loro numero; così il medio aritmetico dei numeri 4, 7, 5, 8, è $\frac{4+7+5+8}{4} = 6$.

366. TEOREMA II. *Se quattro numeri sono tali che la somma di due fra essi sia eguale alla somma degli altri due, i quattro numeri presi in ordine conveniente formano una equidifferenza.*

Abbiansi quattro numeri a, b, c, d, che soddisfaciano alla relazione

$$a + d = b + c.$$

Sottraendo da ambedue i membri di questa eguaglianza i numeri b e d, si ottiene

$$a + d - b - d = b + c - b - d$$

ossia

$$a - b = c - d \text{ cioè } a \,.\, b \,\dot{:}\, c \,.\, d.$$

OSSERVAZIONE. I due teoremi precedenti si possono riunire in un solo sotto questo enunciato. *Condizione necessaria e sufficiente perchè quattro numeri siano in proporzione aritmetica è che la somma di due fra essi sia eguale alla somma degli altri due.*

Esercizî

I. La proporzione $a : b :: c : d$ è una conseguenza dell'altra $a + b : a - b :: c + d : c - d$.

II. Il maggiore dei quattro termini di una proporzione aggiunto al minore dà una somma più grande di quella degli altri due termini.

III. Vi può essere una proporzione tale che, aggiungendo uno stesso numero ai suoi quattro termini, si formi una nuova proporzione?

IV. Dalla proporzione $a : b :: c : d$ si può dedurre

$$a \times b : c \times d :: (a + b)^2 : c + d)^2.$$

V. In qual caso possiamo aggiungere due proporzioni termine a termine, in modo da ottenere una nuova proporzione?

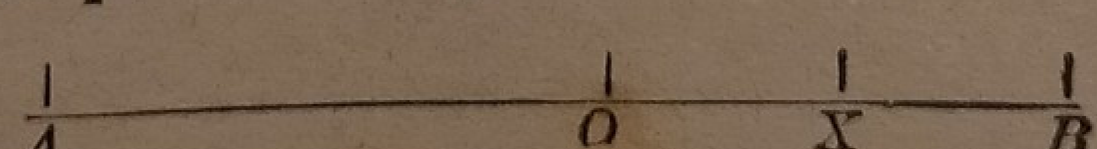
VI. Se si hanno quattro numeri a, b, c, d, tali che b sia eguale ad $\left(\frac{a + c}{2}\right)$ e $\frac{1}{c}$ a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$, i quattro numeri sono in proporzione. Reciprocamente, se in una proporzione $a : b :: c : d$ si ha $b = \left(\frac{a + c}{2}\right)$, si avrà pure $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$.

VII. Dalla proporzione $ma + nb : ma' + nb' :: a : a'$ resulta l'altro $a : a' :: b : b'$, qualunque sieno i numeri m ed n.

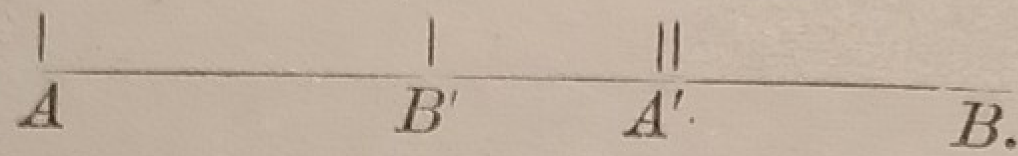
VIII. Si prenda il punto di mezzo O di un segmento AB e si segni un punto X tale che

$$AX : XB :: BX : XO;$$

trovare la posizione del punto X.



IX. La stessa questione, supponendo il punto O posto ai due terzi, ai tre quarti, ai quattro quinti, e in generale agli $\frac{n-1}{n}$ del segmento AB.

X. 

Se sopra un segmento di retta AB si prendono due punti B' e A', di modo che si abbia la proporzione

$$BA' : AB :: A'B' : AB',$$

si avrà

$$\frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'}.$$

XI. Il medio geometrico fra due numeri è 280 ed il rapporto fra il numero maggiore ed il numero minore è eguale a 4. Quali sono i due numeri.

XII. Il rapporto fra due numeri è eguale a $\frac{5}{9}$, e la somma dei quadrati dei numeri stessi è 954. Trovare i due numeri.

XIII. Il rapporto di due numeri è eguale a $\frac{11}{7}$, e la somma del triplo del numero maggiore col quadruplo del minore è 183. Trovare i due numeri.

XIV. Determinare due numeri incogniti, sapendo che il rapporto fra il triplo del numero maggiore ed il quintuplo del minore è $\frac{36}{25}$ e che la differenza dei quadrati dei due numeri è 476.

XV. La somma di tre numeri è 1720; il primo di essi sta al terzo come 5 : 9 e ne differisce di 320 unità. Quali sono i tre numeri?

CAPITOLO XV

APPLICAZIONI DELLA TEORIA DEI RAPPORTI

Grandezze proporzionali

367. Quando due grandezze sono legate fra loro da una certa relazione in modo, che il valore di una dipenda dal valore che prende l'altra, si dice che le due grandezze sono l'una *funzione* dell'altra. Quando poi fra le grandezze sussiste una relazione tale, che ad ogni valore dato ad una di esse corrisponde un solo valore, *unico* e *determinato*, dell'altra, si dice che le due grandezze si corrispondono *univocamente*. Così, per esempio, fra il prezzo di una stoffa e la lunghezza di essa vi è corrispondenza univoca, perchè se, per esempio, 60 metri di questa stoffa si son pagati 12 lire, 12 metri della stessa stoffa si pagheranno evidentemente il doppio, cioè 24 lire, una quantità tre volte minore, cioè 2 metri, si pagheranno tre volte meno, cioè 4 lire, e via di seguito. Quando due grandezze sono l'una funzione dell'altra e si corrispondono univocamente, si può cercare se fra le due grandezze esiste o no *relazione di proporzionalità*.

In tal caso si dice che due grandezze sono *direttamente proporzionali* l'una all'altra, quando due valori qualunque della prima hanno lo stesso rapporto dei due valori corrispondenti della seconda. La geometria, la meccanica, la fisica fanno conoscere grandezze proporzionali le une alle altre. In aritmetica, non si ha

per oggetto di dimostrare questa proporzionalità; essa si ammette come un fatto, che serve alla soluzione dei problemi relativi a queste grandezze.

Esempio. Il salario di un operaio è, in generale, proporzionale al tempo per il quale s'impiega. La quantità di viveri necessaria per un bastimento è proporzionale alla lunghezza del viaggio che si vuole intraprendere.

368. Osservazione. È difficile che una grandezza dipenda esclusivamente da un'altra; spesso molte circostanze diverse influiscono sul suo valore. Si dice allora che due grandezze sono direttamente proporzionali quando, cambiando una di esse e tutte le altre circostanze rimanendo le stesse, due valori qualunque della prima sono proporzionali ai due valori corrispondenti della seconda.

Esempio. Se si dice: il peso di una verga di ferro è proporzionale alla sua lunghezza; si suppone che gli altri elementi che concorrono a determinare il peso, (la larghezza, lo spessore, ecc.) non varino.

369. *Una grandezza può essere ad una volta direttamente proporzionale a più altre.*

Perchè ciò accada basta che, una qualunque di queste grandezze venendo a variare, mentre le altre restano costanti, la grandezza considerata sia direttamente proporzionale a quella che varia.

Esempio. Il prezzo di una pezza di stoffa è direttamente proporzionale alla sua lunghezza, alla sua larghezza e al prezzo del metro quadrato della stoffa.

370. Si dice invece che due grandezze sono *inversamente proporzionali* l'una all'altra, quando due valori qualunque dell'una hanno un rapporto inverso a quello dei due valori corrispondenti dell'altra.

Esempio. Se un vascello ha una quantità determi-

nata di viveri, il viaggio che può intraprendere è inversamente proporzionale al numero di uomini, che compongono il suo equipaggio; cioè, se questo numero diviene doppio o triplo, la lunghezza del viaggio dovrà essere ridotta alla metà o al terzo; se il numero di uomini diviene i $\frac{5}{7}$ di ciò che era, la lunghezza del viaggio diverrà i $\frac{7}{5}$.

371. *Una grandezza può essere ad una volta direttamente proporzionale a certe grandezze ed inversamente proporzionale ad altre.*

Esempio. La lunghezza di una pezza di stoffa è direttamente proporzionale al prezzo che vale, inversamente proporzionale al prezzo del metro quadrato di stoffa ed alla larghezza della pezza.

Cioè:

La larghezza restando la stessa, come pure la qualità della stoffa, la sua lunghezza è proporzionale al prezzo che costa.

La larghezza restando la stessa, come pure il prezzo della stoffa, la lunghezza è inversamente proporzionale al prezzo del metro quadrato.

La qualità della stoffa restando la stessa, come pure il prezzo totale, la sua lunghezza è inversamente proporzionale alla sua larghezza.

372. Osservazione. Negli esempi precedenti, la proporzionalità delle grandezze è *pressochè* evidente. Per qualcuna di esse, tuttavia, si dovrebbe fare una dimostrazione; ma qui si tratta solamente di definire il significato delle parole *direttamente proporzionale* ed *inversamente proporzionale*, e non dimostrare che esse convengono in questo o in quel caso.

Regola per conoscere se due grandezze sono proporzionali

373. La dimostrazione della proporzionalità di due grandezze non appartiene, come abbiamo già detto, all'aritmetica, ma appartiene, in ciascun caso, alla scienza che tratta particolarmente delle grandezze di cui si parla. Alcune grandezze frattanto non formano soggetto di studio di veruna scienza; tali sono la maggior parte di quelle, che abbiamo scelto per esempi nelle pagine precedenti. Ora indicheremo due principii per mezzo dei quali si potrà spesso stabilire la loro proporzionalità.

1° *Se due grandezze sono tali, che, se una di esse diventa un certo numero di volte più grande o più piccola, l'altra divenga lo stesso numero di volte più grande o più piccola, queste due grandezze sono direttamente proporzionali l'una all'altra.*

Rappresentiamo queste due grandezze colle lettere A e B. Se il valore di A diviene un *numero intero* di volte maggiore o minore, il valore di B diverrà, per ipotesi, lo stesso numero di volte maggiore o minore. Fa d'uopo provare che, qualunque siano i valori attribuiti a A, i valori corrispondenti di B saranno proporzionali ad essi.

Supponiamo, per esempio, che ad un valore a della grandezza A corrisponda il valore b della grandezza B; supponiamo pure che A prenda un nuovo valore che sia $\frac{5}{7}$ del primitivo e divenga $a \times \frac{5}{7}$. Si può concepire che il cambiamento si faccia in due volte, e che il valore della grandezza A divenga prima 5 volte maggiore, cioè $a \times 5$, e che poi questo nuovo valore divenga

7 volte minore, cioè $\frac{a \times 5}{7}$: ora, per ipotesi, quando il valore a di A doventa $a \times 5$, quello corrispondente di B, cioè b, doventa $b \times 5$; e quando il nuovo valore di A, cioè $a \times 5$, doventa 7 volte minore cioè $\frac{a \times 5}{7}$, anche quello corrispondente di B, cioè $b \times 5$, doventa $\frac{b \times 5}{7}$. Ora, evidentemente, il rapporto fra i due valori di A è $\frac{a}{a \times \frac{5}{7}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{7}{5}$, e quello fra i due valori corrispondenti di B è $\frac{b}{b \times \frac{5}{7}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{7}{5}$; dunque le due grandezze sono *direttamente proporzionali* (**367**) per definizione.

2° *Se due grandezze sono tali, che, se una di esse diventa un certo numero di volte più grande o più piccola, l'altra divenga lo stesso numero di volte più piccola o più grande, queste due grandezze sono inversamente proporzionali l'una all'altra.*

Indichiamo queste due grandezze colle lettere A e B. Se il valore di A diventa un *numero intero* di volte più grande o più piccolo, il valore di B diverrà, per ipotesi, lo stesso numero di volte più piccolo o più grande. Bisogna provare che i valori di B saranno sempre inversamente proporzionali a quelli attribuiti ad A, qualunque essi siano.

Supponiamo, infatti, che ad un valore a della grandezza A corrisponda il valore b della grandezza B, ed ammettiamo pure che A prenda un nuovo valore che sia $\frac{5}{7}$ del primitivo, e divenga $a \times \frac{5}{7}$. Si può concepire

che il cambiamento si faccia in due volte, e che il valore della grandezza A doventi prima cinque volte maggiore, cioè $a \times 5$, e che poi questo nuovo valore divenga cinque volte più piccolo, cioè $\frac{a \times 5}{7}$; ora quando il valore di A doventa $a \times 5$, quello di B doventa, per ipotesi, $\frac{b}{5}$; e quando il nuovo valore di A, cioè $a \times 5$, doventa $\frac{a \times 5}{7}$, quello corrispondente di b, cioè $\frac{b}{5}$, doventa $\frac{b \times 7}{5}$. Dunque al valore $\frac{a \times 5}{7}$ di A, corrisponde il valore $\frac{b \times 7}{5}$ di B; evidentemente il rapporto fra i due valori di A è $\frac{a}{a \times \frac{5}{7}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{7}{5}$; e quello fra i due valori corrispondenti di B è invece $\frac{b}{b \times \frac{7}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)} = \frac{5}{7}$, inverso al primo, dunque le due grandezze sono inversamente proporzionali.

374. In conseguenza di questi due principii, per stabilire la proporzionalità di due grandezze, basta esaminare il caso in cui una di esse è moltiplicata o divisa per un numero intero.

Esempio I. Se si ammette che per fare un viaggio due, tre .... dieci volte più lungo, o due, tre .... dieci volte più breve, abbisogna una quantità due, tre .... dieci volte maggiore, o due, tre .... dieci volte minore di viveri, se ne conchiuderà che la quantità di viveri necessaria è, in tutti i casi, direttamente proporzionale alla durata del viaggio.

Esempio II. È evidente che, se il metro quadrato

di un panno è due, tre .... dieci volte più caro, o due, tre .... dieci volte meno caro, la lunghezza, che si può comprarne con una data somma, è due, tre .... dieci volte minore, o due, tre .... dieci volte maggiore. Da ciò si deduce che il prezzo del metro quadrato di panno è, in tutti i casi, inversamente proporzionale alla lunghezza che si può comprarne con una data somma di danaro.

Regola del tre semplice

375. Dicesi quesito di regola del tre semplice un quesito nel quale, conosciuto il valore di una grandezza corrispondente ad un dato valore di un' altra grandezza, alla quale la prima è direttamente o inversamente proporzionale, si calcola ciò che diventa la prima quando alla seconda viene attribuito un nuovo valore o viceversa.

Se le due grandezze sono direttamente proporzionali, la regola è diretta: nel caso contrario è inversa.

Esempio I. *Una fabbrica produce annualmente* 1500 *quintali di rame, e consuma* 4892 *quintali di carbone. Quanto carbone consumerebbe, se la produzione annuale si elevasse a* 2755 *quintali?*

La quantità di carbone che si consuma è direttamente proporzionale alla quantità di rame prodotta; in questo esempio si tratta dunque di una regola del tre diretta.

Scritti i dati del problema nel modo seguente

Quintali rame	Quintali carbone
1500	4892
2755	x,

rappresentando con x la quantità cercata di carbone, che si consumerebbe, si osserverà che, le due grandezze

essendo direttamente proporzionali, il rapporto fra i due valori della prima deve essere eguale al rapporto dei due valori corrispondenti della seconda; quindi avremo la proporzione

$$1500 : 2755 :: 4892 : x,$$

da cui si trae

$$x = \frac{2755 \times 4892}{1500}.$$

Esempio II. 25 *operai hanno lavorato* 15 *giorni per fare un certo lavoro:* 17 *operai quanto tempo metteranno a fare lo stesso lavoro?*

Il tempo necessario è inversamente proporzionale al numero di operai; in questo esempio la regola è dunque inversa.

Scritti al solito i dati nel modo seguente;

Operai	Giorni
25	15
17	x,

rappresentando con x il numero di giorni cercato, si osservi che, essendo le due grandezze inversamente proporzionali, il rapporto de' due valori della prima deve essere inverso al rapporto fra i due valori corrispondenti della seconda, dunque avremo la proporzione:

$$25 : 17 :: x : 15;$$

da cui

$$x = \frac{25 \times 15}{17}.$$

Osservazione. Nei due esempi precedenti abbiamo ammessa la proporzionalità diretta o inversa delle grandezze considerate. Questa è una *supposizione*

che deve essere considerata come facente parte dell'enunciato; nella maggioranza dei casi analoghi questa supposizione non è interamente esatta. Se cento operai riuniti in una fabbrica producono un certo lavoro, ciascuno di essi privato del soccorso degli altri non ne produrrà la centesima parte: spesso anche sarebbe incapace di lavorare utilmente.

Regola del tre composta

376. Dicesi quesito di regola del tre composta un quesito, nel quale, essendo conosciuto il valore di una quantità corrispondente a quello di molte altre da cui essa dipende, ed a ciascuna delle quali essa è direttamente o inversamente proporzionale, si calcola ciò che diventa questa quantità, quando tutte le altre acquistano nuovi valori.

Esempio. 25 *operai lavorando* 11^{ore} *per giorno durante* 18 *giorni, hanno inalzato un muro, le cui dimensioni sono: altezza* 3^{m}, *lunghezza* 125^{m}, *spessore* $0^{\text{m}},50$. *Quanti giorni bisogneranno a* 33 *operai, che lavorano* 10^{ore} *per giorno, per inalzare un muro, che ha le dimensioni seguenti: altezza* 4^{m}, *lunghezza* 210^{m}, *spessore* $0^{\text{m}},75$?

In quest'esempio si *suppone* che il tempo necessario sia direttamente proporzionale a ciascuna delle dimensioni del muro e inversamente proporzionale al numero degli operai, ed alla durata del lavoro giornaliero.

Ordinariamente i dati di una regola del tre si dispongono su due linee orizzontali, in modo tale che i due valori di ciascuna specie di grandezze siano l'uno al di sopra dell'altro; così, indicando nel quesito at-

tuale con x il numero di giorni cercato, si scriveranno le due linee seguenti:

Operai	Ore	Giorni	Altezza	Lunghezza	Spessore
25	11	18	3	125	0,50
33	10	x	4	210	0,75

Supporremo che, prendendo per punto di partenza i diversi valori noti, che si trovano nella prima linea, si cambino *successivamente* questi valori 25, 11, 18, 3, 125 e 0,50, nei numeri corrispondenti della seconda linea; e cercheremo quali valori acquisti il numero dei giorni in conseguenza di ciascuno di questi cambiamenti.

Si supporrà in prima che varii solamente il numero degli operai, e di 25 diventi 33, lasciando gli stessi tutti gli altri dati, e si cercherà ciò che deve divenire, in questa ipotesi, il numero dei giorni di lavoro. Si supporrà poscia che gli operai lavorino 10^{ore} per giorno, invece di 11, e si cercherà il numero delle giornate necessarie dopo questo nuovo cambiamento. Finalmente si considererà successivamente l'influenza portata nel valore dei giorni da ciascuno dei cambiamenti fatti alle dimensioni del muro, in guisa che vi saranno in realtà cinque regole del tre semplici da risolvere; l'ultima darà il risultato domandato.

Questi diversi quesiti s'indicano ordinariamente nel modo seguente:

Operai	Ore	Giorni	Altezza	Lunghezza	Spessore
25	11	18	3	125	0,50
33	11	x_1	3	125	0,50
33	10	x_2	3	125	0,50
33	10	x_3	4	125	0,50
33	10	x_4	4	210	0,50
33	10	x	4	210	0,75

In queste linee orizzontali sono scritti i valori, che si suppongono dati successivamente ai diversi elementi, da cui dipende il numero dei giorni, e le lettere mediante le quali s'indicano i valori corrispondenti di questo numero di giorni. Partendo dal valore 18 che è scritto nella prima linea, bisogna calcolare x_1, poi x_2, x_3, x_4, e finalmente x che è la vera incognita del quesito. Ora si hanno evidentemente le proporzioni seguenti:

$$\begin{array}{l}
18 : x_1 :: 33 : 25 \\
x_1 : x_2 :: 10 : 11 \\
x : x_3 :: 3 : 4 \\
x_3 : x_4 :: 125 : 210 \\
x_4 : x :: 0{,}50 : 0{,}75
\end{array}$$

Moltiplicando termine a termine queste proporzioni si ha:

$$18 \times x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 : x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x ::$$
$$:: 33 \times 10 \times 3 \times 125 \times 0{,}50 : 25 \times 11 \times 4 \times 210 \times 0{,}75,$$

e sopprimendo nel primo rapporto i fattori x_1, x_2, x_3, x_4, che si trovano comuni ai due termini di esso, si avrà:

$$18 : x :: 33 \times 10 \times 3 \times 125 \times 0{,}50 : 25 \times 11 \times 4 \times 210 \times 0{,}75;$$

da cui si trae

$$x = \frac{18 \times 25 \times 11 \times 4 \times 210 \times 0{,}75}{33 \times 10 \times 3 \times 125 \times 0{,}50} = g.\ 50\,\frac{2}{5}.$$

Tipo generale delle regole del tre composte

377. Qualunque regola del tre composta è un caso particolare del problema seguente.

Una grandezza M *dipende da molte altre*, A, B, C...., P, Q, R....; *essa è direttamente proporzionale ad* A, B, C...., *e inversamente proporzionale a* P, Q, R.... *Si sa che* M *ha un valore conosciuto* m, *quando* A, B, C..., P, Q, R.... *sono rispettivamente eguali ad* a, b, c...., p, q, r....; *e si domanda ciò che diverrà quando questi elementi prenderanno i valori* a_1, b_1, c_1...., p_1, q_1, r_1.... Invece di cambiare ad un tempo tutti gli elementi da cui dipende *M*, si può farli variare uno ad uno; il problema si riduce così a tanti quesiti parziali quanti sono gli elementi *a*, *b*, *c*..., *p*, *q*, *r*.... Ciascuno di questi quesiti è una regola del tre semplice, giacchè si tratta sempre di valutare il cambiamento che subisce una grandezza per la variazione di un solo elemento, al quale essa è direttamente o inver-proporzionale.

Questi diversi quesiti s'indicano ordinariamente nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
m & a & b & c & p & q & r \\
x_1 & a_1 & b & c & p & q & r \\
x_2 & a_1 & b_1 & c & p & q & r \\
x_3 & a_1 & b_1 & c_1 & p & q & r \\
x_4 & a_1 & b_1 & c_1 & p_1 & q & r \\
x_5 & a_1 & b_1 & c_1 & p_1 & q_1 & r \\
x & a_1 & b_1 & c_1 & p_1 & q_1 & r_1 .
\end{array}$$

In queste linee orizzontali sono scritti i valori successivi delle grandezze da cui dipende la grandezza *M*,

come pure le lettere mediante le quali s'indicano i valori corrispondenti di m. Ora, per ipotesi, m essendo direttamente proporzionale ad a, b, c, ed inversamente proporzionale a p, q, r, si hanno evidentemente le proporzioni:

$$\begin{aligned} m &: x_1 :: a : a_1, \\ x_1 &: x_2 :: b : b_1, \\ x_2 &: x_3 :: c : c_1, \\ x_3 &: x_4 :: p_1 : p, \\ x_4 &: x_5 :: q_1 : q, \\ x_5 &: x :: r_1 : r. \end{aligned}$$

Moltiplicando termine a termine queste proporzioni e sopprimendo i fattori x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, che sono comuni ai due termini del primo rapporto, si avrà

$m : x :: a \times b \times c \times p_1 \times q_1 \times r_1 : a_1 \times b_1 \times c_1 \times p \times q \times r$;

da cui si trae

$$x = \frac{m \times a_1 \times b_1 \times c_1 \times p \times q \times r}{a \times b \times c \times p_1 \times q_1 \times r_1}.$$

Se ne deduce la regola seguente:

Conoscendo il valore m *di una grandezza, come pure i valori corrispondenti* a, b, c, p, q, r *di quantità alle quali essa è direttamente o inversamente proporzionale, per calcolare il valore* x *di questa grandezza, corrispondente ai valori* a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1 *di quelle da cui essa dipende, bisogna moltiplicare* m *per i valori primitivi* p, q, r *delle quantità alle quali è inversamente proporzionale e per i nuovi valori* a_1, b_1, c_1 *di quelle alle quali è direttamente proporzionale, e dividere questo prodotto per i nuovi valori* p_1, q_1, r_1 *delle quantità alle quali la grandezza cercata è inversamente proporzionale, e pei valori primitivi* a, b, c *di quelle alle quali essa è direttamente proporzionale.*

Metodo di riduzione all' unità

378. Alcuni trovano più semplice risolvere i problemi di regola del tre in un modo alquanto differente, che dicesi *metodo di riduzione all' unità*.

Applichiamolo ai due esempi di regola del tre semplice trattati innanzi (**375**): per risolverli con questo metodo si calcola quanto diventerebbe la grandezza di cui si cerca il valore, se quella da cui dipende prendesse il valore *uno*, e partendo da questo dato si calcola poi qual valore deve assumere la grandezza, che si cerca, quando quella da cui dipende prende il nuovo valore, che deve avere realmente.

Esempio I. Se per produrre 1500 quintali di rame occorrono 4896 quintali di carbone, per 1 quintale solo di rame occorrerà una quantità di carbone 1500 volte minore, cioè quintali $\frac{4896}{1500}$, e per produrre 2755 quintali di rame occorrerà una quantità di carbone 2755 volte maggiore, cioè quintali $\frac{4896 \times 2755}{1500}$. Questo numero è eguale a quello ottenuto col processo precedentemente seguito.

Esempio II. Se 25 operai hanno impiegato 15 giorni a fare quel lavoro, 1 operaio solo impiegherebbe un tempo 25 volte maggiore, cioè giorni 15×25, e 17 operai impiegheranno, per conseguenza, un tempo 17 volte minore che un operaio solo, cioè giorni $\frac{15 \times 25}{17}$, che è lo stesso valore ottenuto col primo metodo.

379. Riprendiamo ora il problema trattato innanzi (**376**) di regola del tre composta. Per applicare a questo il metodo di riduzione all' unità, si cerca qual va-

lore assumerebbe la grandezza, che si cerca, se tutte quelle dalle quali dipende prendessero il valore *uno*; poi partendo da questo dato si trova qual valore prenderà la grandezza cercata, quando quelle dalle quali dipende assumono i nuovi valori, che devono loro essere attribuiti, secondo i dati del problema. Scriviamo come sopra i dati su due linee orizzontali.

Operai	Ore	Giorni	Altezza	Lunghezza	Spessore
25	11	18	3	125	0,50
33	10	x	4	210	0,75.

Il metodo di riduzione all' unità consiste, secondo ciò che abbiam detto, nel calcolare prima ciò che diventerebbe il numero di giorni, se tutti i dati della questione divenissero l' unità, cioè se vi fosse un operaio solo, che lavorasse un' ora per giorno per costruire un muro, che avesse 1^m di altezza, 1^m di larghezza e 1^m di spessore. Fatto questo primo calcolo se ne deduce facilmente il tempo, che corrisponde ai dati assegnati.

Se invece di 25 operai ne supponiamo un solo, il numero dei giorni necessario a fare il lavoro diverrà evidentemente 25 volte maggiore, cioè 18×25.

Se invece di 11^{ore} di lavoro al giorno supponiamo un' ora, il numero dei giorni diverrà evidentemente 11 volte più grande, cioè $18 \times 25 \times 11$.

Se l' altezza invece di essere 3^m divenisse 1^m, il numero di giorni di lavoro necessario diverrà evidentemente 3 volte minore, cioè $\dfrac{18 \times 25 \times 11}{3}$.

Se la lunghezza invece di essere 125^m divenisse 1^m, il numero di giorni di lavoro diverrà evidentemente 125 volte minore, cioè $\dfrac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125}$.

Infine, se lo spessore invece di essere $0^m,50$ fosse 1^m, il numero di giorni sarà evidentemente moltiplicato pel rapporto di 1^m a $0^m,50$, cioè per $\frac{1}{0,50}$, e diverrà quindi $\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50}$.

Dunque $\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50}$ è il numero di giorni necessario ad un operaio, che lavora un'ora per giorno, per fare un muro, che ha per dimensioni: 1^m di altezza, 1^m di lunghezza, 1^m di larghezza.

Se supponiamo che lavorino 33 operai, il numero di giorni necessario a fare il muro sarà 33 volte minore, cioè

$$\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50 \times 33}.$$

Se questi operai lavorano 10^{ore} per giorno invece di una sola, il numero dei giorni sarà 10 volte minore, cioè

$$\frac{18 \times 25 \times 11}{3 \times 125 \times 0,50 \times 33 \times 10}.$$

Infine, se le dimensioni del muro, invece di essere 1, 1, 1, divenissero 4, 210, 0,75, si vedrà al modo stesso che il numero dei giorni di lavoro dovrà moltiplicarsi per questi tre numeri, e divenire finalmente

$$\frac{18 \times 25 \times 11 \times 4 \times 210 \times 0,75}{3 \times 125 \times 0,50 \times 33 \times 10},$$

ch' è precisamente il risultato trovato prima.

CAPITOLO XVI

SOLUZIONE DI ALTRI PROBLEMI, DIPENDENTI DALLA REGOLA DEL TRE

Regola d'interesse

380. Chiamasi *interesse* o *frutto* il guadagno che fa sul suo denaro chi lo impresta. Questo guadagno dipende dalla somma imprestata, dal tempo che dura l'imprestito, e da un terzo elemento, chiamato *tassa* o *ragione* dell'interesse, che è l'interesse di 100 fr. durante un anno.

L'interesse è *semplice*, quando la somma imprestata resta la medesima nella durata dell'imprestito; è *composto* quando, al termine di ogni anno, l'interesse si aggiunge al capitale per produrre interesse nell'anno seguente.

Il danaro dato in imprestito si chiama in generale *capitale*. Il frutto o interesse di un capitale qualunque per un anno si chiama *rendita*.

Interessi semplici

381. Tutti i problemi, che possono venir proposti sugl'interessi semplici, si risolvono facilmente mediante una formula generale, che ci proponiamo di trovare.

Chiamiamo C un capitale qualunque, t il tempo durante il quale rimane impiegato, (l'unità essendo l'anno), r la tassa dell'interesse, cioè il frutto di 100

lire per un anno, (che si scrive r % e si legge *r per cento*), e proponiamoci di trovare l'interesse stesso, che indicheremo con I.

Possiamo porre questo problema sotto forma di un problema di regola del tre composta, dicendo: *se un capitale di 100 lire dà un frutto* r *in 1 anno, qual sarà il frutto dato da un capitale di* C *lire in un tempo* t? Impostando la regola si ottiene:

Frutto	Capitale	Tempo
r	*100*	*1*
x	C	t

ed osservando che l'interesse è direttamente proporzionale al capitale e al tempo, avremo (377)

$$x = I = \frac{r \times C \times t}{100}. \tag{1}$$

La formula (1) permette di calcolare una delle quantità I, r, C, t, quando siano conosciute le altre. In fatti, da questa formula, moltiplicando ambedue i membri per 100, si ottiene

$$I \times 100 = r \times C \times t,$$

e da questa, dividendone ambedue i membri per $r \times t$, si ottiene l'altra

$$\frac{I \times 100}{r \times t} = C; \tag{2}$$

dividendone invece i due membri per $C \times t$, si ottiene

$$\frac{I \times 100}{C \times t} = r; \tag{3}$$

e, dividendone ambedue i membri per $C \times r$, si ha

$$(4) \qquad \frac{I \times 100}{C \times r} = t$$

382. **Problema I.** *Calcolare l' interesse prodotto da un dato capitale, impiegato ad una data tassa per un dato tempo.*

Si risolve mediante la formola (1) $I = \frac{r \times C \times t}{100}$.

Esempio. Calcolare l'interesse di 37845 lire, impiegate al 4 %, durante 15 mesi, cioè $\frac{5}{4}$ d'anno.

Si ha $r = 4$, $C = 38745$ lire, $t = \frac{5}{4}$; quindi

$$I = \frac{4 \times 38745 \times \frac{5}{4}}{100} = \frac{38745 \times 5}{100} = \text{L. } 1937{,}25.$$

383. **Problema II.** *Calcolare qual capitale deve impiegarsi per ottenere in un dato tempo, ad una data tassa, una certa somma d' interesse.*

Questo problema si risolve mediante la formula (2) $C = \frac{I \times 100}{r \times t}$.

Esempio. Qual è il capitale, che deve impiegarsi, perchè alla tassa del 6 % produca in 4 anni lire 768 d'interesse?

Si ha $I = 768$ lire, $r = 6$, $t = 4$; quindi

$$C = \frac{768 \times 100}{6 \times 4} = 128 \times 25 = \text{L. } 3200.$$

384. **Problema III.** *Calcolare a qual tassa è stato impiegato un dato capitale, che in un dato tempo ha prodotto un dato frutto.*

Questo problema si risolve mediante la formula (3) $r = \frac{I \times 100}{C \times t}$.

Esempio. A qual tassa è stato impiegato un capitale di 25000 lire, che in 3 mesi ha dato per frutto 400 lire?

Si ha $I = 400$ lire, $C = 25000$ lire, $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ d'anno; quindi

$$r = \frac{400 \times 100}{25000 \times \frac{1}{4}} = \frac{40}{25 \times \frac{1}{4}} = \frac{160}{25} = \text{L. } 6{,}40.$$

385. Problema IV. *Calcolare per quanto tempo è stato impiegato un dato capitale, che ad una data tassa ha prodotto un dato frutto.*

Si risolve mediante la formula (4) $t = \frac{I \times 100}{C \times r}$.

Esempio. Per quanto tempo è stato impiegato un capitale di 7200 lire, che ha dato al 5 % un frutto di L. 1200.

Si ha $I = 1200$ lire, $C = 7200$ lire, $r = 5$; quindi

$$t = \frac{1200 \times 100}{7200 \times 5} = \frac{20}{6} = \textit{anni } 3 \textit{ e mesi } 4.$$

386. Problema V. *Trovare la rendita quando sono dati il capitale e la tassa dell' interesse.*

Questo problema si risolve mediante la formula (1), nella quale si fa $t = 1$, $I = R$, rappresentando con R la rendita: allora questa formula diviene

$$R = \frac{C \times r}{100}.$$

REGOLA. *Per trovare la rendita di un dato capitale basta moltiplicarlo per la tassa dell' interesse divisa per cento.*

ESEMPIO. Calcolare la rendita di un capitale di 75000 lire, calcolando la tassa dell'interesse al 5 %.

Si ha $C = 75000$ lire, $r = 5$; quindi

$$R = \frac{75000 \times 5}{100} = 750 \times 5 = \text{L. } 3750.$$

387. PROBLEMA VI. *Conoscendo la rendita di un certo capitale e la tassa dell' interesse, calcolare il capitale stesso.*

Questo problema, che dicesi *capitalizzazione di una rendita*, si risolve mediante la formula (2), facendovi $t = 1$, $I = R$; si ottiene in tal modo

$$C = \frac{R \times 100}{r}.$$

REGOLA. *Per capitalizzare una rendita basta moltiplicarla per il quoziente, che si ottiene dividendo* 100 *per la tassa dell' interesse.*

ESEMPIO. Capitalizzare una rendita di 1200 lire al 5 %.

Si ha $R = 1200$ lire, $r = 5$, dunque avremo

$$C = \frac{1200 \times 100}{5} = \text{L. } 24000.$$

388*. OSSERVAZIONE. L'espressione

$$I = r \times \frac{C \times t}{100},$$

che abbiamo trovata innanzi, richiede il calcolo di t, che è in generale una frazione. A quest' oggetto non crediamo inutile aggiungere le seguenti considerazioni.

Supponiamo che il capitale di 25000 lire sia stato impiegato pei mesi di Aprile, Maggio e Giugno e 10 giorni di Luglio alla tassa del 6 %; l'espressione precedente darebbe

$$I=\frac{25000\times 6\times \frac{101}{365}}{100}=1500\times\frac{101}{365}=415{,}07.$$

Il valore di I, nell'ipotesi adottata nei problemi precedenti che i mesi siano eguali e di 30 giorni ciascuno, sarebbe dato dall'espressione

$$I=1500\times\frac{100}{360}=416{,}67.$$

Come si vede, la differenza tra il valore esatto e quello approssimato è assai piccola, e questo accade perchè, se da una parte, procedendo a questo modo, si trascura qualche giorno nella valutazione del tempo t, dall'altra parte l'anno si considera di soli 360 giorni, il che stabilisce un certo compenso nel valore della frazione t. L'errore può del resto essere in più o in meno secondo i casi.

I negozianti poi adottano generalmente un'altra maniera per valutare gli interessi, la quale conduce spesso ad errori maggiori. Essi infatti esprimono il tempo esattamente in giorni, ma suppongono l'anno di soli 360 giorni; in questa ipotesi, e tenendo fermi i dati precedenti, si avrebbe

$$I=1500\times\frac{101}{360}=\text{L. }420{,}83,$$

valore notevolmente maggiore di 415,07.

Osserviamo ora che il valore di I può scriversi

$$I = 25000 \times \frac{6}{100} \times \frac{101}{360} = 25 \times 6 \times \frac{101}{36} = 25 \times \frac{101}{6};$$

e quest' ultima espressione dimostra che *l' interesse di un capitale al 6 °/₀ si ottiene moltiplicando la millesima parte del capitale pel numero di giorni corrispondenti al tempo durante il quale è posto a frutto, e prendendo la sesta parte del prodotto.* Questo modo di operare riesce molto comodo, quando si tratta di calcolare il frutto di diversi capitali alla stessa tassa del 6 °/₀: per esempio, 57 giorni d' interessi sul capitale 2450 lire, 18 giorni sul capitale 15000 lire, 91 giorni sul capitale 3000 lire, ecc., si calcoleranno aggiungendo insieme i prodotti $2,45 \times 57$, 15×18, 3×91, ecc., e prendendo il sesto della somma.

Se la tassa è diversa dal 6 °/₀, si calcola prima l' interesse al 6, e al risultato si aggiunge o si toglie, secondo le circostanze, una parte aliquota corrispondente alla differenza delle tasse. Così l' interesse al $7\,^1/_2$ °/₀ per 65 giorni sul capitale 24000 si ha, calcolandone l' interesse al 6 °/₀ ed aggiungendovi la sua quarta parte; ma l' interesse al 6 °/₀ è $\frac{24 \times 65}{6} = 260$, dunque l' interesse al $7\,^1/_2$ è $260 + \frac{260}{4} = 325$.

Regola di sconto

389*. Per agevolare le contrattazioni, specialmente da un paese all' altro, si usano in commercio certi do-

cumenti detti *cambiali*, nelle quali un negoziante promette il pagamento di una somma di denaro alla fine di un tempo determinato. Chi possiede una di queste carte, quando è trascorso il tempo stabilito, o, come suol dirsi, alla *scadenza* della cambiale, si presenta al negoziante e riceve la somma promessa; ma se gli bisognasse il denaro prima della scadenza, potrà farselo anticipare dallo stesso negoziante, o più spesso da un altro, o da qualche istituto di credito, rilasciandogliene una parte a titolo d'interesse, il quale in questo caso si chiama *sconto*.

390. Nel commercio lo sconto è l'interesse calcolato durante il tempo che manca per arrivare alla scadenza sul *valor nominale* della cambiale, cioè sulla somma che si paga alla scadenza e che è quella scritta nell' effetto, e questo modo di calcolare lo sconto si chiama *sconto all' infuori* o *bancario*.

ESEMPIO. Una cambiale di L. 1500 *scade* fra cinque mesi; la tassa dell' interesse essendo 5 per cento, quale sarà lo sconto all' infuori, se si vuole essere pagati immediatamente?

Lo sconto cercato è, per convenzione, l' interesse di 1500 fr. per 5 mesi o $\frac{5}{12}$ di anno; esso è dunque

$$1500 \times \frac{5}{12} \times 0{,}05 = \text{L. } 31{,}25.$$

OSSERVAZIONE. Nell' esempio precedente, la somma pagata cinque mesi prima del fissato è L. 1500 — L. 31,25, cioè L. 1468,75; tuttavia il negoziante ritiene l'interesse su L. 1500, cioè sopra una somma maggiore di quella, che sborsa effettivamente; dunque la

convenzione, che serve di base alla regola di sconto all' infuori non è giusta.

391*. Vi ha un secondo modo per calcolare lo sconto che chiamasi *sconto all' indentro* o *razionale*, e che è più equo del precedente. Vediamo in che consiste.

Supponiamo che uno possegga una cambiale, che la somma a cui essa ascende sia rappresentata da C, e che scada alla fine del tempo t; il possessore di questa cambiale non vuole aspettare il tempo stabilito e preferisce essere pagato immediatamente; qual somma gli deve pagare chi anticipa il pagamento? Sia r la tassa dell' interesse; se chi paga ritenesse la somma anticipata pel tempo t, ne ritrarrebbe un frutto che perde anticipandola, ed è questo lo *sconto* che giustamente gli si deve. Ora, la somma C promessa nella cambiale, cioè il *valor nominale*, può considerarsi come il valore che acquista dopo il tempo t un capitale x, impiegato alla tassa di $r\,^0/_0$; questo capitale x è quello che deve ricevere il possessore della cambiale, e dicesi *valore attuale*. Ma, per la formula (1) (**381**), l' interesse prodotto nel tempo t dal capitale x alla tassa $r\,^0/_0$ è dato da $\frac{r \times t \times x}{100}$: dunque deve aversi

$$C = x + \frac{r \times t \times x}{100} = \left(1 + \frac{r \times t}{100}\right) \times x;$$

e, per conseguenza, dividendo ambedue i membri di questa eguaglianza per $1 + \frac{r \times t}{100}$,

$$x = \frac{C}{1 + \frac{r \times t}{100}} = \frac{C \times 100}{100 + r \times t}.$$

Lo sconto sarà dato dalla formula

$$C-x=C-\frac{C\times 100}{100+r\times t}=\frac{C\times(100+r\times t)-C\times 100}{100+r\times t}=$$

$$=\frac{C\times 100+C\times r\times t-C\times 100}{100+r\times t}=\frac{C\times r\times t}{100+r\times t}.$$

Esempio. Supponiamo che una cambiale di 700 lire scada fra 7 mesi; calcolare lo sconto all'indentro, la tassa essendo il 5 %.

Si ha $C=700$, $r=5$, $t=\frac{7}{12}$; quindi

$$C-x=\frac{700\times 5\times\frac{7}{12}}{100+5\times\frac{7}{12}}=\frac{4900}{247}=\text{L. } 19{,}84.$$

Della rendita consolidata

392*. Quando un Governo contrae qualche debito, prendendo denaro a prestito da particolari, negozianti o banchieri, suole ordinariamente compensarli con creare e cedere a loro favore una *rendita*, corrispondente al capitale ricevuto, la quale si paga a rate semestrali dal suo tesoro; riservandosi di *estinguere il debito*, cioè restituire a poco a poco il capitale, secondo che le sue finanze glielo permettono. I primi proprietari di quella rendita sono dunque i banchieri che hanno fatto l'imprestito, ma per comodità del commercio è stabilito che essa possa cedersi ad altri, restando a cura del Governo di fare *iscrivere* i nomi dei nuovi possessori in un apposito registro, che si chiama *Gran libro*, affinchè godano, invece degli antichi, de' paga-

menti semestrali degli interessi. La *rendita*, detta *consolidata* o *iscritta*, diviene quindi una mercanzia, che si compra e vende come qualunque altra, e però il suo prezzo varia a norma delle ricerche; è chiaro poi che un tal prezzo rappresenta il capitale corrispondente alla rendita. Il Governo nel creare la rendita suol destinare anche un fondo annuale per la sua *ammortizzazione*, cioè suole impiegare annualmente una somma stabilita a comprare dai particolari una porzione di rendita consolidata per *annullarla* o *ammortizzarla*, ed estinguere così a poco a poco il suo debito. Diminuendo per questo motivo d'anno in anno la quantità della rendita in commercio, ne aumenta naturalmente il prezzo, purchè non vi sieno altre cause tendenti a farlo diminuire; come, un nuovo imprestito che facesse il Governo, o pure qualche oscillazione commerciale o politica, che potesse porre in dubbio il pagamento puntuale della rendita.

Le rendite consolidate, offrendo un mezzo comodo e facile d'impiegare il denaro, sono divenute in Europa un ramo importante di commercio, per la qual cosa abbiamo creduto utile di trattare qui appresso le principali questioni che ad esse si riferiscono.

393. I. Si vogliono acquistare L. 114 di rendita iscritta, al prezzo di L. 81 $\frac{3}{4}$; si domanda qual somma si dovrà sborsare. Il prezzo che regola le contrattazioni, come quello che si legge sui *listini* della *Borsa*, e che si chiama *corso*, suol corrispondere a 5 lire di rendita annuale; perciò si dovranno sborsare lire 81 $\frac{3}{4}$ per ogni 5 lire di rendita, ed il costo di 114 lire di rendita si otterrà dalla proporzione

$$5 : 114 :: 81,75 : x \text{ da cui } x = \frac{81,75 \times 114}{5} = 1863,90.$$

Ma questo calcolo si eseguisce con una regola pratica semplicissima; si cerca il costo di una lira di rendita prendendo la quinta parte del prezzo 81,75, che si ha raddoppiando la sua decima parte, ed indi si moltiplica quel costo pel numero 114 indicante la quantità della rendita che si vuol comprare. In altro modo, si moltiplica la decima parte del prezzo per il doppio della rendita da acquistarsi, e si ottiene il costo totale della rendita; così L. 153 di rendita a $99\frac{7}{8}$ importano $9{,}9875 \times 306 = 3056{,}17\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r}
8{,}175 \\
2 \\ \hline
16{,}350 \\
114 \\ \hline
6540 \\
1635 \\
1635 \\ \hline
1863{,}90
\end{array}$$

Dalla proporzione precedente, avendosi $x = 81{,}75 \times \frac{114}{5}$, si vede ancora che la somma da sborsarsi per acquistare una data quantità di rendita si può calcolare, moltiplicando il quinto di quella rendita per il prezzo di corso. E, considerando in questa moltiplicazione il quinto della rendita da acquistarsi come moltiplicando, ed il corso, cioè il prezzo di 5 lire, come moltiplicatore, è chiaro che crescendo o diminuendo un tal prezzo di una o più unità, il prodotto crescerà o diminuirà di una o più volte il quinto della rendita, cioè, *per ogni unità di aumento o di diminuzione del prezzo di 5 lire di rendita, il costo totale di una data quantità di rendita da acquistarsi cresce o diminuisce del quinto di quella rendita*. Infatti, 114 lire di rendita a $82\frac{3}{4}$ costano lire 1866,70, e questa somma supera di $22{,}8 = \frac{114}{5}$ il costo delle stesse lire 114 trovato di sopra al prezzo di L. $81\frac{3}{4}$.

Se per l'acquisto di una data quantità di rendita si fosse sborsata una certa somma, e si volesse conoscere il prezzo al quale si è comprata quella rendita, da ciò che precede chiaramente apparisce che bisogne-

rebbe *dividere la somma sborsata per la quinta parte della rendita*; o, ciò che vale lo stesso, *dividere il decuplo della somma sborsata per il doppio della rendita.*

394. II. Si domanda, quanta rendita iscritta si può comprare con L. 1863,90 al prezzo di L. 81 $\frac{3}{4}$. La proporzione $81{,}75 : 1863{,}90 :: 5 : x$ risolve il problema; da essa si ha $x = 114$; ma il valore d' x si ottiene più facilmente *cercando, come sopra, il costo* 16,35 *di una lira di rendita e dividendo per questo numero la somma* 1863,90 *da impiegarsi in compra.* Per un altro esempio, si vogliano impiegare 16400 lire in compra di rendita consolidata a 74: l'operazione per trovare la quantità della rendita, che si può acquistare, consisterà in dividere 16400 per 14,8 (il quale numero si ottiene raddoppiando la decima parte di 74) ed il quoziente 1108,11 indicherà la rendita che si può acquistare. Ma si avverta che, per semplicità di scrittura, il Gran Libro non permette se non l'acquisto di un numero intero di lire di rendita, cominciando da una lira.

395. III. Si vuol sapere a che ragione s'impiegherà il denaro, comprando rendita al prezzo di 81 $\frac{3}{4}$. Il valore della ragione si potrà dedurre dalla proporzione

$$81\frac{3}{4} : 100 :: 5 : x = \frac{500}{81\frac{3}{4}} = 6\frac{1}{8} \text{ circa.}$$

Interessi composti

396. Una somma dicesi posta ad *interesse composto*, o a *moltiplico*, quando è stabilito che gl' interessi, che *maturano* alla fine di ogni anno, si aggiungano al capitale e doventino insieme con esso fruttiferi per

l'anno seguente, e così per più anni successivi sino alla restituzione del capitale con tutti gl'interessi, ed interessi d'interessi riuniti.

397. Problema I. *Calcolare ciò che diventa una somma posta ad interesse composto durante un dato numero di anni.*

Indichiamo questa somma con A, con r la tassa dell'interesse, con n il numero di anni durante i quali è impiegato il capitale, ed infine con M il *montante* del capitale A al termine di questo tempo, o, come altri lo chiamano, l'*accumulazione* del capitale coi suoi frutti e coi frutti dei frutti.

Cerchiamo prima quel che diviene la somma A dopo essere stata impiegata durante un anno; la tassa essendo r, l'interesse del capitale A in un anno è $\frac{A \times r}{100}$; per conseguenza la somma A doventa dopo un anno, cumulata co' suoi interessi,

$$A + \frac{A \times r}{100} = A \times \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

di qui si vede che *per calcolare quel che doventa una somma dopo essere stata tenuta a frutto per un anno, alla tassa di* **r** °/₀, *bisogna moltiplicarla per* $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

La somma $A \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ può esser considerata come il capitale messo a frutto al principio del secondo anno; diverrà dunque, secondo la regola precedente, alla fine di questo secondo anno,

$$A \times \left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \left(1 + \frac{r}{100}\right) = A \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2.$$

Questo è il capitale messo a frutto durante il terzo anno; diverrà dunque, alla fine di questo terzo anno,

$$A \times \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \times \left(1+\frac{r}{100}\right) = A \times \left(1+\frac{r}{100}\right)^3.$$

Continuando sempre a fare lo stesso ragionamento, si vedrà che ogni anno il capitale viene ad esser moltiplicato per il fattore costante $\left(1+\frac{r}{100}\right)$ e, per conseguenza, dopo n anni sarà moltiplicato per $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$ Di guisa che il capitale A, dopo un impiego di n anni, sarà doventato

$$M = A \times \left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Esempio. Calcolare il montante di 2250 lire in capo a 3 anni, alla tassa 4 %.

1 lira diviene alla fine di un anno L. 1,04; dunque 2250 lire divengono dopo 3 anni,

$$\text{L. } 2250 \times 1{,}04^3 = \text{L. } 2250 \times 1{,}124864 = \text{L. } 2530{,}94.$$

Osservazione. Se la durata dell'impiego del capitale non fosse un numero intero di anni, si calcolerebbe, colla formula precedente, quel che doventa il capitale in capo al maggior numero intero di anni contenuto nel tempo che ha durato l'imprestito, e si aggiungerebbe a questa somma l'interesse da essa prodotto durante la frazione di anno che resta.

I calcoli per l'interesse composto esigono ordinariamente, specialmente quando il numero n sia grande, un rilevante numero di moltiplicazioni, le quali però si possono risparmiare, applicando il calcolo lo-

garitmico, quando si abbia cognizione di questo, che forma parte dello studio dell' Algebra.

398. Problema II. *Qual somma bisogna porre a interesse composto, per produrre dopo* n *anni un dato capitale ?*

Questo problema si risolve anche colla formula (1); l'incognita invece di essere M è A; dalla formula detta si ha, dividendo ambedue i membri dell'eguaglianza per $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$,

$$A=\frac{M}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}.$$

Osservazione. Il problema precedente può enunciarsi così: *Qual è il valore attuale di un capitale* M *pagabile in* n *anni?*

Esempio. Si domanda il valore attuale di 36000 lire pagabili in 4 anni, la tassa dell'interesse essendo il 6 %.

1 lira diviene, in capo ad un anno, L. 1,06; per conseguenza il valore attuale di 36000 lire, pagabili dopo 4 anni, è

$$\frac{36000}{1{,}06^4}=\frac{36000}{1{,}26247696}=\text{L. } 28515{,}37.$$

Rendite perpetue. Annualità

399. Una rendita perpetua è una somma che si deve riscuotere *indefinitamente* alla fine di ogni anno. Supponendo la tassa dell' interesse stazionaria ed eguale, per esempio, a 5 per 100, un capitale di 100

lire vale una rendita perpetua di 5 lire; reciprocamente una rendita perpetua di 5 lire vale 100 lire.

400. Problema I. *Calcolare il valore di una rendita perpetua data, essendo conosciuta la tassa dell' interesse.*

Siano a la somma che si deve riscuotere alla fine di ogni anno, e r la tassa dell'interesse. Si tratta di cercare il capitale che produce annualmente a lire d'interesse, cioè una rendita perpetua di a lire. Questo capitale C è dato dalla proporzione

$$C : 100 :: a : r,$$

da cui

$$C = \frac{100 \times a}{r};$$

questo è dunque il valore di una rendita perpetua di a lire.

Osservazione. 100 lire equivalgono ad una rendita di 5 lire, il cui prossimo pagamento è ancora lontano di un anno; il valore precedente di C è dunque anche relativo al caso in cui il primo pagamento della rendita perpetua non deve aver luogo che in capo ad un anno.

401. Problema II. *Trovare il valore attuale di una rendita perpetua di* a *franchi per anno, il primo pagamento della quale non deve aver luogo che dopo* n *anni.*

Dopo $n - 1$ anni, il primo pagamento dovrà farsi in capo ad un anno; gli altri gli succederanno regolarmente. La rendita perpetua varrà dunque allora (400)

$$\frac{a \times 100}{r}.$$

Si può quindi assimilare questa rendita ad una somma $\frac{a \times 100}{r}$ pagabile fra $n-1$ anni, il cui valore attuale è (**398**)

$$\frac{a \times 100}{r} \times \frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}}.$$

Esempio. Si vuol comprare una rendita perpetua di 840 lire, il primo pagamento della quale, non deve aver luogo che fra 7 anni. Quanto si deve sborsare, volendo impiegare il denaro al 6 %?

Applicando la formula precedente, il valore della rendita in questione è

$$\frac{840 \times 100}{6} \times \frac{1}{1{,}06^6} = \frac{840}{0{,}06} \times \frac{1}{1{,}06^6} = \frac{14000}{1{,}4185191} = \text{L. } 9869{,}45.$$

402. Una *annualità* è una rendita pagabile durante un numero limitato di anni.

Problema I. *Calcolare il valore attuale di una annualità di* a *lire, pagabile per* n *anni, il primo pagamento dovendo aver luogo dopo un anno.*

La tassa dell'interesse si suppone essere r %.

Una annualità pagabile per n anni, può essere considerata come la differenza di due rendite perpetue, il primo pagamento della prima delle quali deve aver luogo fra un anno, e quello della seconda fra $n+1$ anni. Il valore attuale della prima di queste rendite è (**400**) $\frac{a \times 100}{r}$ e quello della seconda (**401**) $\frac{a \times 100}{r} \times \frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}}$: la differenza di questi due

valori, ossia

$$\frac{a \times 100}{r} - \frac{a \times 100}{r} \times \frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

$$= \frac{a \times 100}{r} \times \left\{ 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n} \right\},$$

è dunque il valore attuale dell'annualità.

Esempio. Si vuole impiegare del denaro al 5 %: quanto bisogna pagare per una rendita di 4000 lire all'anno, pagabile per 5 anni, ed il primo pagamento della quale verrà fatto in capo ad un anno?

Il valore attuale dell'annualità sarà, secondo la formula precedente:

$$4000 \times \frac{100}{5} \times \left(1 - \frac{1}{1{,}05^5}\right) = 80000 \times \left(1 - \frac{1}{1{,}2762815625}\right)$$

$$= 80000 \times (1 - 0{,}7835261) = 80000 \times 0{,}2164739 =$$

$$= \text{L. } 17317{,}91.$$

403. Problema II. *Qual somma bisogna pagare annualmente per* n *anni onde soddisfare un debito* A, *il primo pagamento dovendo effettuarsi alla fine di un anno, e la tassa dell'interesse essendo* r %?

Se a indica l'annualità da pagare, il debito che essa può soddisfare è (**402**)

$$\frac{a \times 100}{r} \times \left\{ 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n} \right\};$$

si deve dunque avere

$$\frac{a\times 100}{r}\times\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\}=A,$$

e per conseguenza, dividendo ambedue i membri dell'eguaglianza per $\frac{100}{r}\times\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\}$,

$$a=\frac{A}{\frac{100}{r}\times\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\}}.$$

Esempio. Si prendono a prestito 80000 lire al 6 % per 4 anni; per conseguenza bisogna pagare ogni anno L. 4800 d'interessi. Qual somma bisogna pagare annualmente durante i 4 anni per liberarsi al tempo stesso del debito costituito dal capitale e degl'interessi?

Avremo, applicando la formula trovata, facendo

$$A=80000,\ r=6,\ n=4,$$

$$a=\frac{80000}{\frac{100}{6}\times\left\{1-\frac{1}{1{,}06^4}\right\}}=\frac{80000\times 0{,}06}{1-\frac{1}{1{,}06^4}}=$$

$$=\frac{4800}{1-\frac{1}{1{,}26247696}}=\frac{4800}{1-0{,}7920936}=\frac{4800}{0{,}2079064}$$

e quindi $a=$ L. 23087,31.

Anche questi calcoli sulle rendite perpetue e sulle annualità esigono, quando il numero degli anni è grande, la conoscenza del calcolo logaritmico.

Regola di partizione e di società

404. La *regola di società* ha per oggetto di dividere il guadagno o la perdita di una società commerciale fra le persone che vi hanno preso parte e proporzionalmente ai loro diritti respettivi, che son rappresentati dal capitale impiegato da ciascun socio e dal tempo durante il quale questo capitale è stato tenuto in comune cogli altri. Se i capitali sono stati impiegati tutti per uno stesso tempo, la regola di società dicesi *semplice;* se sono stati impiegati per tempi diversi dicesi *composta.*

Per risolvere le questioni relative a questi problemi bisogna anzitutto risolvere il seguente problema, che dicesi di *regola di partizione.*

Dividere un numero N *in parti proporzionali a più numeri dati* a, b, c.....

Indicando con $x, y, z....$ le parti si deve avere

$$x : y :: a : b, \quad y : z :: b : c; \quad x : z :: a : c, \text{ ec.}$$

Ora, permutando i medi in queste proporzioni, si ottiene:

$$x : a :: y : b; \quad y : b :: z : c; \quad x : z :: a : c, \text{ ec.,}$$

le quali proporzioni esprimono che i rapporti $x : a,\ y : b,\ z : c....$ son tutti eguali fra loro, cioè che si hanno le relazioni

$$x : a :: y : b :: z : c :: .....$$

Ma in una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente; dunque avremo:

$$x+y+z+\ldots : a+b+c+\ldots :: x : a$$
$$x+y+z+\ldots : a+b+c+\ldots :: y : b$$
$$x+y+z+\ldots : a+b+c+\ldots :: z : c.$$

Ora la somma delle parti $x+y+z+\ldots$ deve dare il numero N da dividersi, dunque avremo pure

$$N : a+b+c+\ldots :: x : a$$
$$N : a+b+c+\ldots :: y : b$$
$$N : a+b+c+\ldots :: z : c$$

e via di seguito. Calcolando il termine incognito di ciascuna proporzione si ottiene

$$x=\frac{N\times a}{a+b+c+\ldots},\ y=\frac{N\times b}{a+b+c+\ldots},\ z=\frac{N\times c}{a+b+c+\ldots}$$

e via di seguito.

Possiamo dunque stabilire questa regola:

Volendo dividere un numero in parti proporzionali a più numeri dati, si ottiene ciascuna parte, moltiplicando il numero dato per il numero al quale la parte cercata è proporzionale, e dividendo il prodotto per la somma dei numeri ai quali devono essere proporzionali le singole parti.

405. Premesso questo, passiamo a risolvere i due problemi relativi alla regola di società.

1° *Caso.* Tre negozianti hanno messo in commercio respettivamente i capitali c_1, c_2 e c_3 ed hanno avuto un guadagno G; quanto spetta a ciascuno?

È chiaro che il problema è ridotto a dividere la

somma G in parti proporzionali ai numeri c_1, c_2, c_3; avremo quindi, indicando con x, y, z i guadagni,

$$x = \frac{G \times c_1}{c_1 + c_2 + c_3}; \quad y = \frac{G \times c_2}{c_1 + c_2 + c_3}; \quad z = \frac{G \times c_3}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

In generale dunque *ogni parte è eguale al guadagno totale moltiplicato per il capitale corrispondente e diviso per la somma dei capitali.*

Esempio. Tre negozianti hanno riunito i loro capitali in commercio; il primo ha posto 2000 lire, il secondo 4200 e il terzo 3000 lire. Dopo qualche tempo vogliono dividere fra loro il guadagno ottenuto, che fu di 3895 lire: si domanda quanto spetta a ciascuno?

Rappresentando con x, y, z le tre parti, si ha immediatamente, secondo la regola precedente,

$$x = \frac{3895 \times 2500}{2500 + 4200 + 3000},$$

$$y = \frac{3895 \times 4200}{2500 + 4200 + 3000},$$

$$z = \frac{3895 \times 3000}{2500 + 4200 + 3000}.$$

406. 2° *Caso.* Quando i negozianti, che formano società di commercio, non impiegano i loro capitali per lo stesso tempo, allora la distribuzione del guadagno deve farsi avendo riguardo a questa condizione particolare.

Se più negozianti hanno posto in commercio dei capitali c_1, c_2, c_3, *durante i tempi* t_1, t_2, t_3, *le loro parti di guadagno saranno proporzionali ai prodotti* $c_1 \times t_1$, $c_2 \times t_2$, $c_3 \times t_3$.

Osserviamo che il frutto del capitale c_1, impiegato pel tempo t_1, è eguale al frutto del capitale $c_1 \times t_1$ impiegato per 1 anno; similmente i capitali c_2, c_3, im-

piegati pei tempi t_2, t_3, produrranno gli stessi frutti che i capitali $c_2 \times t_2$, $c_3 \times t_3$, impiegati per 1 anno. Dunque ai capitali proposti impiegati per diversi tempi si potranno sostituire gli altri $c_1 \times t_1$, $c_2 \times t_2$, $c_3 \times t_3$ impiegati per lo stesso tempo, cioè per 1 anno.

Si avrà dunque chiamando x, y, z, le parti e G il guadagno totale

$$x = \frac{G \times c_1 \times t_1}{c_1 \times t_1 + c_2 \times t_2 + c_3 \times t_3},$$
$$y = \frac{G \times c_2 \times t_2}{c_1 \times t_1 + c_2 \times t_2 + c_3 \times t_3},$$
$$z = \frac{G \times c_3 \times t_3}{c_1 \times t_1 + c_2 \times t_2 + c_3 \times t_3}.$$

In generale, *se i capitali sono impiegati per tempi differenti, basta repartire il guadagno fra gli associati in parti proporzionali ai prodotti dei capitali per i tempi respettivi.*

Esempio. Tre associati hanno fatto un guadagno di L. 12352; il primo aveva posto in società L. 10000 per 3 anni, il secondo L. 15000 per 4 anni, ed il terzo L. 8000 per 2 anni: quale deve essere la parte di ciascuno?

Si tratta di dividere 12352 in tre parti rispettivamente proporzionali a 10000×3, 15000×4 e 8000×2, cioè a 30000, 60000, 16000, o, ciò ch'è lo stesso, a 30, 60, 16; si avrà dunque, indicando con x, y, z le parti,

$$x = \frac{12352 \times 30}{106} = \text{L. } 3495,84....,$$
$$y = \frac{12352 \times 60}{106} = \text{L. } 6991,68....,$$
$$z = \frac{12352 \times 16}{106} = \text{L. } 1864,45....$$

Regola di mescuglio o di alligazione

407. La *regola di mescuglio* serve a risolvere due specie di problemi: 1° Mescolando insieme più quantità di una stessa sostanza di diverse qualità e quindi di prezzo diverso, trovare il prezzo medio di un'unità di misura del mescuglio ottenuto. — 2° Avendo due qualità di una stessa merce di vario prezzo, determinare quanto bisogna mescolarne dell'una e dell'altra, per avere una determinata quantità di merce da vendersi ad un dato prezzo medio fra i due prezzi precedenti.

408. Problema I. *Si sono mescolati* 80 *litri di vino a* L. 0,75 *il litro con* 25 *litri di vino a* L. 0,60. *Quale è il prezzo di un litro della mescolanza?*

È chiaro che

80 *litri* a L. 0,75 *il litro costano* 0,75×80=L. 60
25 . . . a L. 0,60 . . . . 0,60×25=L. 15
dunque 105 *litri di vino costano* in tutto . . . L. 75.

Quindi, dividendo il prezzo totale del vino, L. 75, pel numero totale dei litri, cioè 105, si avrà il prezzo *medio* di un litro, ossia il costo di un litro della mescolanza, che sarà L. 0,71.

409. Problema II. *In qual proporzione bisogna mescolare del vino a* L. 0,80 *il litro con vino a* L. 0,50, *per ottenere* 100 *litri di vino a* L. 0,62?

Sopra ogni litro di vino a L. 0,50 venduto L. 0,62 si guadagnano L. 0,12.

Sopra ogni litro a L. 0,80 venduto L. 0,62 si perdono L. 0,18.

Dunque chiamando x il numero de' litri da L. 0,50 e y quello de' litri da L. 0,80; su x litri da L. 0,50 venduti a L. 0,62 si guadagneranno L. $0,12 \times x$ e su y da L. 0,80 venduti a L. 0,62 si scapiteranno L. $0,18 \times y$; perchè non vi sia nè perdita nè guadagno bisogna che si abbia la relazione

$$0,12 \times x = 0,18 \times y \quad \text{ossia} \quad x : y :: 0,18 : 0,12$$

oppure $x : y :: 18 ; 12$; e, poichè deve aversi pure $x + y = 100$, il problema si risolverà col metodo esposto nel n. 404.

410. Il prezzo del miscuglio, o *lega*, di più metalli fusi insieme si ottiene nello stesso modo; anzi la *regola di alligazione* ha preso in origine il suo nome dalla *lega* dei metalli.

L' oro e l' argento non si trovano mai puri in commercio, ma sempre mescolati con una piccola quantità di metallo più vile, come il rame, ed il rapporto fra il peso della parte di metallo fino contenuto nel miscuglio, ed il peso totale di questo, si chiama *titolo*; così una verga di metallo fino combinato con rame per $\frac{1}{10}$ del peso totale, si dice al *titolo* di $\frac{9}{10}$; e se la porzione di rame è di $\frac{2}{1000}$ soltanto, la verga è al titolo di $\frac{998}{1000}$, ecc. Il *titolo* delle monete d' oro e d' argento ha, come sappiamo, lo stesso significato.

411. Problema I. *Si hanno due verghe d' argento, la prima al titolo di* 0,950, *la seconda al titolo di* 0,885: *qual quantità di ciascuna di esse bisogna prendere per avere un chilogrammo di argento al titolo di* 0,900?

Ogni grammo al titolo di 0,885 porta nella lega 0,015 d'argento di meno di quello che vi bisognerebbe perchè il titolo fosse 0,900; al contrario, ogni grammo a 0,950 porta 0,050 di argento al disopra della proporzione richiesta. Se dunque si chiamano x e y le quantità rispettive delle due verghe, vi sarà compenso se

$$0{,}015 \times x = 0{,}050 \times y \text{ da cui } x : y :: 0{,}050 : 0{,}015;$$

oppure $x : y :: 50 : 15$; e poichè deve aversi pure:

$$x + y = \text{kg. } 1,$$

tutta la questione è ridotta a dividere un chilogrammo in due parti proporzionali a 50 e 15: si ha dunque **(404)**

$$x = \frac{\text{kg. } 1 \times 50}{65} = \text{kg. } 0{,}7692....,$$

$$y = \frac{\text{kg. } 1 \times 15}{65} = \text{kg. } 0{,}2307....$$

412. Problema II. *Si è ritirata dal commercio una quantità di monete vecchie per coniarne delle nuove; ed a tale oggetto si sono fusi insieme 23 chilogrammi di monete di argento al titolo di 0,825, 14 chilogrammi di monete dello stesso metallo al titolo di 0,910, e chilogrammi 19 al titolo di 0,845: si domanda il titolo della lega.*

È chiaro che

kg. 28 a 0,825	*contengono di metallo fino*	kg.	$23 \times 0{,}825 = 18{,}971$
kg. 14 a 0,910	»	»	»	$14 \times 0{,}910 = 12{,}740$
kg. 19 a 0,845	»	»	»	$19 \times 0{,}845 = 16{,}055$
kg. 56 *di mescolanza contengono di metallo fino* . . .			kg.	47,770

e siccome il titolo non è che il rapporto del peso della quantità di metallo fino al peso totale, il titolo della *lega* sarà $\frac{47{,}77}{56} = 0{,}853$.

Esercizî sui due capitoli precedenti

I. Una grandezza proporzionale a più altre è proporzionale al loro prodotto.

II. Se una quantità è direttamente proporzionale a due altre, la prima restando fissa, le altre due saranno inversamente proporzionali l'una all'altra.

III. Se una quantità è direttamente proporzionale ad un'altra ed inversamente proporzionale ad una terza, la prima restando fissa, le altre due saranno direttamente proporzionali l'una all'altra.

IV. Una pompa, che estrae litri 8 di acqua al minuto ha vuotato un pozzo in 10 ore; quanto tempo avrebbe impiegato a vuotare lo stesso pozzo una pompa, che estraesse litri 6 d'acqua al minuto.

V. Una persona ha pagato L. 1852 per fitto di una casa per un anno e 4 mesi. Se vuol prolungare il fitto per altri 10 mesi, quanto dovrà sborsare di più?

VI. Una locomotiva ha percorso un certo tratto di strada in 5 ore, 20 minuti e 30 secondi, camminando colla velocità di km. 36,18 all'ora. Se avesse camminato colla velocità di dam. 412, quanto tempo avrebbe impiegato a percorrere lo stesso cammino.

VII. Una macchina a vapore della forza di 8 cavalli ha fatto un certo lavoro della lunghezza di 720 braccia toscane, 6 soldi, 10 denari. Quanti metri dello stesso lavoro farebbe nello stesso tempo una macchina a vapore della forza di 12 cavalli?

VIII. Una persona compra un terreno, che affitta poi a L. 120 l'anno; supposto che essa paghi L. 7,56 d'imposta, si vuol sapere quanto per cento gli frutta all'anno il capitale impiegato nella compra?

IX. Secondo un progetto per un edifizio una scala doveva avere 240 scalini, alti ciascuno dm. $1\frac{5}{6}$; poi nel-

l'esecuzione l'altezza fu ridotta a dm. $1\frac{3}{5}$: quanti scalini ha la scala?

X. Se in 50 kg. d'acqua salata son contenuti 7 kg. di sale, quanti kg. d'acqua dolce conviene aggiungervi, perchè 20 kg. d'acqua salata contengano $\frac{2}{3}$ di kg. di sale?

XI. Un accollatario ha preso impegno di fare inalzare in 15 giorni un muro lungo m. 44,4, alto m. 3,2, dello spessore di m. 0,4, impiegando 25 operai, che lavorano 12 ore al giorno. In seguito, essendosi trovato che il muro deve essere soltanto lungo m. 35,2, alto m. 2,96 e dello spessore di m. 0,56, e dovendosi condurre a termine in 11 giorni con soli 20 operai, quante ore al giorno dovranno lavorare?

XII. 8 persone stabilirono di fare un viaggio, che doveva durare 32 giorni, per il quale misero in previsione una spesa di 6300 lire. Il viaggio durò 9 giorni di più, ma i viaggiatori non furono che 6: qual sarà stata la spesa, supposto che spendessero per ogni giorno e per ogni viaggiatore quanto avevano preveduto?

XIII. Un forte ha una guarnigione di 1360 soldati e 6480 ettolitri di grano, che debbono servire per mesi $5\frac{1}{2}$. Si aumenta il presidio di 400 uomini ed il grano di ettolitri 2340: per quanto tempo potranno bastare le provvigioni?

XIV. Un viaggiatore è andato da A a B in 9 giornate di cammino, camminando 8 ore al giorno. Vuol tornare da B ad A in 7 giorni, aumentando la sua velocità di $\frac{2}{5}$: quante ore al giorno dovrà camminare?

XV. 24 operai hanno scavato in 15 giorni e mezzo, lavorando 8 ore al giorno, un fosso, lungo m. 30, largo m. 3, profondo m. $2\frac{1}{3}$. Quanti operai occorreranno per scavare in 20 giorni, lavorando 6 ore al giorno, un altro fosso, lungo m. $28\frac{3}{5}$, largo m. 2, profondo m. 1,5, supposto che la forza de' primi operai stia a quella dei secondi come 9 : 7, e che le durezze dei due terreni, in cui si deve lavorare, stiano fra loro come 5 : 8.

XVI. Si son comprati due buoi e pagati in ragion diretta della loro forza e in ragione inversa della loro età; il primo ha 5 anni e 3 mesi, il secondo 3 anni e 2 mesi: le forze dei due animali stanno fra loro come $4\frac{1}{2} : 3$. Sapendo che il primo è costato L. 840, si vuol sapere quanto si è pagato il secondo.

XVII. Con 80 rotoli di carta lunghi m. 8,24, larghi m. 0,36, si sono tappezzate 6 stanze; quanti rotoli di carta di m. 12,6 per m. 0.40 occorreranno per tappezzare 9 stanze, se la lunghezza delle prime sta a quella delle seconde come $\frac{5}{6} : \frac{7}{9}$ e la larghezza delle prime sta a quella delle seconde come $\frac{4}{9} : \frac{5}{7}$?

XVIII. L'acqua entra in due vasche, le capacità delle quali stanno fra loro come 25 : 15, con pressioni proporzionali a 5 e 8. Si sa che le quantità d'acqua emesse da due tubi stanno fra loro in ragione delle pressioni e dei quadrati dei diametri dei tubi. Si domanda qual diametro debbono avere 9 cannelle, perchè riempiano la prima vasca nello stesso tempo in cui la seconda vien riempita da 6 cannelle che hanno cm. 3 di diametro.

XIX. Il capitale impiegato in una fabbrica è di 700000 lire, di cui una metà rappresenta il *capitale fisso* (macchine e fabbriche), e l'altra è il *capitale mobile*. Questa fabbrica produce annualmente 8575 tonnellate di ferro fuso, che si vendono al prezzo di 125 lire la tonnellata. Il costo di 100 chilogrammi di ferro fuso si distribuisce nel modo seguente:

Minerale. . kg. 300 a L. 1 i 100^{kg}. .	L. 3
Coke. . . . . kg. 200 a L. 2 i 100^{kg}. .	» 4
Salario degli operai.	» 0,30
Spese generali e di mantenimento	» 1,40
	L. 8,70

Si calcola inoltre il 10 per 100 d'interessi per il capitale fisso della fabbrica, e il 7 per cento per il capitale mobile; qual è il guadagno annuale? Diminuire di una stessa

quantità la tassa dell'interesse del capitale mobile e quello del capitale fisso, in modo da potere aumentare di 10 per 100 il salario degli operai, senza cambiare questo guadagno.

XX. Una fabbrica riduce in ferro 10000 tonnellate di ferraccio per produrre 100 chilogrammi di ferro: si spendono:

Ferraccio.... kg. 132 a L. 12,5 ..	L. 16,15
Carbon fossile » 300 a » 1,20..	» 3,60
Salario degli operai............	» 2,00
Spese generali e di mantenimento	» 1,20
Costo di 100 *chilogrammi di ferro*	L. 22.95

Il capitale mobile essendo di 350000 lire, determinare a qual prezzo un capitalista deve pagare questa fabbrica perchè il suo danaro gli frutti il 15 per 100. Si supporrà che l'interesse del capitale mobile sia calcolato a 6 per 100, e che il ferro fabbricato si venda 257 lire la tonnellata.

XXI. La sabbia aurifera che si ricava dalle rive del Reno ha una ricchezza media di 0,000000232 (rapporto del peso dell'oro al peso totale). Il valore totale dell'oro che si trae annualmente da questa sabbia è 45000 lire. Qual è il peso totale della sabbia sottoposta alla lavatura, supponendo la perdita dovuta all'operazione di 0,09 (9 per 100)?

XXII. Le sabbie aurifere della Siberia contengono in media $\frac{3}{2}$ solotnicks di oro sopra 4000 libbre russe di sabbia. Sapendo che la libbra russa contiene 96 solotnicks, è necessario sapere che essa corrisponde a kg. 0,4095 per calcolare la quantità d'oro contenuta in 1000 chilogrammi di questa sabbia?

XXIII. Le spese necessarie per estrarre il rame da un quintale di minerale si elevano a L. 3,75; si compra una certa quantità di minerale che contiene 12 per 100 di rame, al prezzo di L. 18 il quintale; il rame perduto nell'opera-

zione ascendendo ai due centesimi di quello che contiene il minerale, quale sarà il prezzo del quintale di rame?

XXIV. Il numero dei posti presi nei vagoni di prima classe di una strada ferrata è stato, nel primo semestre, $\frac{8}{67}$ del numero totale dei posti. Questo rapporto si è elevato, durante il secondo semestre, a $\frac{1}{7}$, ed è per l'intero anno $\frac{3}{22}$. Dedurre da questi dati il rapporto del numero dei viaggiatori del primo semestre al numero di quelli del secondo semestre, e calcolare questi due numeri, supponendo che nel secondo semestre vi sieno stati 206000 viaggiatori di più.

XXV. Un appaltatore dichiara di fornire zavorra in frantumi di pietra per una lunghezza di via ferrata di 17 chilometri, alla ragione di L. 3,90 il metro cubo.

La pietra viene a costare nelle cave 1 lira al metro cubo. Nella rottura, il suo volume è ridotto di $\frac{1}{10}$. Per la rottura si paga L. 1,25 per metro cubo di pietra rotta; e per il trasporto alla strada ferrata, compresovi caricamento e scaricamento, L. 0,80 per metro cubo di pietra rotta e per chilometro.

Si domanda a qual distanza media dalla strada ferrata debbono trovarsi le cave, affinchè l'appaltatore faccia un guadagno di $\frac{1}{10}$ sul prezzo stabilito.

XXVI. In una strada ferrata le rotaie pesano 38 chilogrammi per metro corrente. La lunghezza di ciascuna spranga di rotaia è di 5 metri. Il prezzo delle rotaie per 100 chilogrammi è 37 lire. La lunghezza della strada è di 198 chilometri, e la carreggiata è doppia, cioè formata da due binarii o da 4 rotaie.

Si domanda il peso totale delle rotaie impiegate per formare la carreggiata; il cubo del ferro, la sua densità essendo di 7,70; il numero delle spranghe; il prezzo totale dei due binarii.

XXVII. Un operaio può trasportare ogni giorno in una carretta 800 chilogrammi ad un chilometro. Il prezzo della giornata è di L. 2,25. Si domanda quanto costeranno 500 metri cubi di terra trasportati a 97 metri, sapendo che il metro cubo di terra pesa 1600 chilogrammi.

XXVIII. Un cavallo può trascinare, mediante un carro, 1200 chilogrammi; la sua velocità è di ch. 4,25 all'ora; il tempo richiesto per caricare e scaricare è di 10 minuti; il prezzo della vettura è di 5 lire per giorno, e la durata del lavoro è di 10 ore.

Si domanda quanto costeranno 500 metri cubi di terra trasportati a 97 metri di distanza, il metro cubo pesando 1600 chilogrammi.

XXIX. Un negoziante affida per un certo tempo la gestione del suo negozio ad un'altra persona, col patto che questa gli corrisponda il 6 % all'anno di guadagno. Dopo 3 anni e 7 mesi riprende l'azienda; quanto deve ricevere di guadagno secondo il patto della cessione?

XXX. Da una somma impiegata ad interesse semplice, al 5 %, per 3 anni 9 mesi e 18 giorni, si sono avute L. 1596 di frutto. Qual'è la somma imprestata?

XXXI. Di due somme, una di L. 8400 e l'altra di L. 12000, impiegate alla stessa tassa, la seconda frutta in 3 anni L. 540 più della prima. Qual'è la tassa?

XXXII. Da una somma di L. 10000, impiegata per 6 anni 8 mesi e 12 giorni ad interesse semplice, si son ritirate fra capitale e interesse L. 14020. A che tassa è stato impiegato il capitale?

XXXIII. Una persona impresta una somma di L. 5400 al 6 % ad interesse semplice, e vuol ritirare questa somma quando il capitale ed il frutto ammontino insieme a L. 7344, Quanto tempo dovrà durare l'imprestito?

XXXIV. Si vuole impiegare un capitale di 24000 lire al 5 %: torna più conto impiegarlo ad interesse semplice per 8 anni, o per soli 3 anni ad interesse composto?

XXXV. Una persona prende a prestito una somma per 4 anni e si offre di rimborsarla, o cogli interessi com-

posti 5 %, il che farebbe L. 29736,1449, ovvero di pagare l'interesse semplice del 6 % all'anno. Trovare la somma imprestata, e quale de' due modi di calcolare l'interesse torni più vantaggioso a chi presta il danaro.

XXXVI. Un tale morendo lascia ad un suo nipote L. 9261, che debbonsi ritirare da un banchiere, per una somma depositata presso di questo 4 anni prima, al frutto del 5 %, ad interesse composto. Qual'era la somma depositata?

XXXVII. Un negoziante vuole scontare una cambiale di L. 6300, che scade fra 2 mesi e 10 giorni: gli metterà più conto scontarla *all' indentro* al 5 %, o *all' infuori* al 4 %?

XXXVIII. Scontando all' indentro al 4 % una cambiale, che scade fra 2 mesi, si sono riscosse L. 9000. Qual'era il valor nominale di questo effetto?

XXXIX. Una cambiale subisce lo stesso sconto, sia che venga scontata *all' indentro* al $6\frac{1}{4}$ %, o *all' infuori* al 6 %. Quanto tempo manca alla scadenza?

XL. Un tale possiede 300 lire di rendita 3 % e 450 lire di rendita $4\frac{1}{2}$ % sul consolidato francese. Vende la prima al corso di 67,45 e la seconda al corso di 96,75, e col denaro incassato compra rendita italiana 5 % al corso di 64,90. Qual'è il valore della rendita comprata?

XLI. Un agente di cambio aveva comprato 3500 lire di rendita 5 % al corso di 64,95: dopo alcuni giorni, avendo la rendita subito un ribasso di L. 0,35, è obbligato a venderla. Qual'è la sua perdita?

XLII. Un banchiere rivende 4500 lire di rendita 5 %, comprata al corso di 64,70, e vi fa un guadagno di L. 270. Quanto è stato il rialzo della rendita quando egli l'ha rivenduta?

XLIII. Si vuole estinguere un debito contratto di L. 1120, co' suoi interessi composti al 5 %, in tre pagamenti eguali effettuati al termine di ogni anno. A quanto ammonterà ciascun pagamento?

XLIV. Un negoziante ha comprato quantità eguali

di tre differenti qualità di seta, pagando la prima L. 12 al kg., la seconda L. 10 al kg. e la terza L. 8 al kg.: ha speso in tutto L. 2400. Si vuol sapere quanto ha sborsato per ciascuna qualità di seta comprata.

XLV. A tre impiegati viene assegnata una gratificazione di L. 1720 per un lavoro straordinario: il primo vi ha lavorato 1 mese e 8 giorni, il secondo 28 giorni, il terzo 20 giorni. Quanto spetta a ciascuno?

XLVI. Tre pastori hanno preso in affitto un pascolo; il primo vi ha tenuto 30 pecore per 10 giorni; il secondo 10 cavalli per 8 giorni; il terzo 6 buoi per 12 giorni. Posto che un cavallo mangi quanto 3 pecore, ed un bue quanto 2 cavalli, e che la spesa del fitto sia stata di L. 194,40, quanto dovrà sborsare ciascun pastore?

XLVII. Due negozianti posero in società L. 2400 il primo, e L. 3600 il secondo: il guadagno ricavato in due anni dal loro commercio è stato di L. 720. Quanto tocca a ciascuno?

XLVIII. Un negoziante imprese una speculazione con L. 6000; dopo 3 mesi si associò un altro capitalista con L. 7200, e dopo 8 mesi, da che questi era entrato in società col primo, si unì ad essi un terzo socio con L. 3600 di capitale: 6 mesi dopo sciolsero la loro ditta con un guadagno di L. 1512. Quanto spetta a ciascuno?

XLIX. Tre speculatori avendo condotto a termine un'impresa con un capitale sociale di L. 10000, hanno avuto per respettivi guadagni L. 480, L. 720 e L. 1200. Si trovi il capitale impiegato da ciascuno.

L. Due negozianti hanno fatto con un capitale di L. 8400 un guadagno che sta a quel capitale come 2 : 14. Si domanda il capitale ed il guadagno di ciascuno, sapendo che il capitale messo dal primo corrisponde al triplo del guadagno totale.

LI. Due negozianti hanno avuto un guadagno di L. 1800 con un capitale di L. 4500. Si vuol sapere il capitale impiegato da ciascuno di essi, se il guadagno fatto dal primo supera di L. 540 quello del secondo.

LII. Tre soci hanno avuto in una loro speculazione un guadagno di L. 600, delle quali il terzo ha avute L. 150: il primo ha avuto fra capitale e guadagno L. 540, ed il secondo L. 810. Qual'è il capitale messo da ciascun socio ed il guadagno respettivo?

LIII. Un negoziante, che ha in magazzino lana da L. 3,50 e da L. 4,80 al kg., ne deve mandare ad un cliente kg. 80 a L. 4,30 al kg. Quanta lana dovrà mescolare dell'una e dell'altra qualità?

LIV. Un orefice ha bisogno per un lavoro di 2 hg. d'oro al titolo di 0,835: ne ha al titolo di 0,950 ed al titolo di 0,725: quanto deve fonderne delle due qualità?

LV. Un pezzo d'argento al titolo di 0,970, fuso con un altro al titolo di 0,880, ha prodotto argento al titolo di 0,900. Se il primo pezzo d'argento pesava 29 hg., qual sarà stato il peso del secondo pezzo?

TAVOLE DI RAGGUAGLIO

Misure lineari ed itinerarie

Misure antiche italiane

BOLOGNESE....	*Piede* — (12 *once* — 12 *punti*)...	m.	0,380098
	Braccio o *auna* — (20 *once*).....	»	0,640039
	Pertica — (10 *piedi*)............	km.	1,90049
	(*Miglio* di 500 *pertiche*).		
GENOVESATO ..	*Canna* — (10 *palmi* — 12 *once* — 12 *punti*)..................	m.	2,49095
	Cannella — (12 *palmi*)..........	»	2,98914
	Miglio	km.	1,488
LOMBARDIA....	*Piede* — 12 *pollici*.............	m.	0,435185
	(*Trabucco* di 6 piedi).		
	Braccio (12 *once* — 12 *punti* — 12 *atomi*).................	»	0,594936
	Miglio — 3000 braccia..........	km.	1,7848
MODENESE	*Piede*.........................	m.	0,523048
	(*Pertica* o *cavezzo* di 6 piedi).		
	Braccio.......................	»	0,633150
	Miglio — 500 pertiche..........	km.	1,5691
NAPOLETANO ..	*Palmo*—(12 *once*—5 *minuti* oppure 10 *decimi* — 100 *centesimi*)	m.	0,26455
	Canna — 10 *palmi*.............	»	2,6455
	Miglio di 60 al grado — 700 canne.	km.	1,85185
PARMENSE.....	*Braccio* (12 *once* — 12 *punti*)....	m.	0,5452
	(*Pertica* di 6 braccia).		
	Braccio da seta	»	0,5878
	Braccio da tela................	»	0,6395
	Miglio di 75 al grado..........	km.	1,613

PIEMONTE	*Piede* — (12 *once* — 12 *punti* — 12 *atomi*)	m.	0,514403
	(*Trabucco* di 6 piedi).		
	Raso — 14 once del piede	»	0,600137
	Miglio di 45 al grado	km.	2,469136
ROMAGNA	*Piede* — (*Passo* di 5 piedi)	m.	0,2976
	Palmo mercantile	»	0,2491
	(*Canna* di 8 palmi).		
	Miglio — 1000 passi — 5000 piedi.	km.	1,48948
SARDEGNA	*Palmo*	m.	0,2625
	(*Trabucco* di 12 palmi).		
	Miglio	Km.	2,51856
SICILIA	*Palmo* — (12 *once* — 12 *linee* — 12 *punti*)	m.	0,258098
	(*Canna* di 8 palmi).		
	Canna — 4 *passetti*	»	2,062
	Miglio — 5760 *palmi*	km.	1,4866
TOSCANA	*Braccio* — (20 *soldi* — 12 *denari*).	m.	0,58366
	(*Canna agrimensoria* di 5 braccia).		
	Canna per le stoffe (di 4 braccia).	»	2,334
	Miglio — braccia 2833,312	km.	1,65361
VENETO	*Piede o palmo* — (12 *once*)	m.	0,347398
	(*Passo* di 5 piedi).		
	Braccio da lana	»	0,6833
	Braccio da seta	»	0,6387
	Miglio — 1000 passi	km.	1,73867

ROMA ANTICA	*Piede antico* — $\frac{1}{5000}$ del miglio di 75 a grado	m.	0,29625
	Cubito di piedi $1\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{10000}$ della lega di 25 a grado	»	0,44437
	Miglio di 75 a grado — di 1000 passi — ciascuno di 5 piedi antichi	km.	1,481
GRECIA ANTICA	*Stadio* — $\frac{1}{8}$ del miglio = $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado	»	0,185
	Piede olimpico — $\frac{1}{6000}$ del miglio di 60 a grado	m.	0,30859

GRECIA ANTICA	*Piede pizio o delfico antico* — $\frac{4}{5}$ dell' olimpico	m.	0,24687
	Stadio olimpico — 600 piedi olimpici — $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado	km.	0,185
	Stadio pizio o delfico — 600 *piedi delfici* — $\frac{1}{10}$ del miglio di 75 a grado	»	0,148

Misure estere

AUSTRIA	*Piede* (*Fuss*) — (12 *pollici* — 12 *linee*)	m.	0,316081
	Tesa (*Klafter*) di 6 piedi.		
	Miglio di posta	km.	7,856
BAVIERA	*Piede* (*Fuss*) — (12 *pollici* — 12 *linee*)	m.	0,291859
	Tesa (*Klafter*) di 6 *piedi*	»	
DANIMARCA ...	*Piede del Reno* — (12 *pollici* — 12 *linee*)	m.	0,31385
	Pertica di 12 piedi.		
	Miglio di 14 $\frac{3}{4}$ a grado	km.	7,532
FRANCIA	*Lega metrica*	»	4
INGHILTERRA ..	*Piede* (*Feet*) — 12 *pollici*	m.	0,304794
	Yard di 3 piedi — *Fathom* di 2 yards.		
	Miglio di 1760 yards	km.	1,609
NORVEGIA	*Piede* (*Fod*)	m.	0,313763
	Favn di 6 piedi.		
	Miglio	km.	11,295
OLANDA	*Piede di Amsterdam* — (11 *pollici*).	m.	0,2831
	Piede del Reno (V. Danimarca).		
	Miglio di 15 a grado	km.	7,408
	Miglio nuovo	»	1
PORTOGALLO ..	*Piede* (*Pé*) — (12 *pollici*)	m.	0,3285
	Palmo di piedi 1 $\frac{1}{2}$.		
	Lega di 18 a grado	km.	6,173
PRUSSIA	*Piede decimale*	m.	0,3768
	Ruthe di 12 piedi.		
	Piede del Reno (V. Danimarca).		
	Miglio del Reno	km.	7,532

RUMENIA	*Palma* — 10 degeti	m.	0,196213
	Stangenu di 10 palme.		
	Miglio	km.	7,848
RUSSIA	*Piede inglese* (V. Inghilterra).		
	Archin	m.	0,711194
	Sagèna di 3 archin.		
	Wersta	km.	1,067
	Miglio finlandico di 100 werste.		
SERBIA	*Hâlebi*	m.	0,6858
SPAGNA	*Piede* (*Piè*) — (12 pollici)	»	0,2875
	Estado (2 vare — 3 piedi).		
	Lega di 16 $\frac{3}{5}$ al grado	km.	6,693
SVEZIA	*Piede* — (10 *pollici* — 10 linee)	m.	0,2969
	Tesa — (3 *aune* — 2 *piedi*).		
	Miglio	km.	10,638
SVIZZERA	*Lega*	»	4,8
TURCHIA	*Archin* — (2 *cadem* — 12 *parmac*).	m.	0,75774
	Berrì — 66 $\frac{2}{3}$ al grado	km.	1,667

Misure di superficie

Misure antiche italiane

BOLOGNESE	*Tornatura* — (144 *pertiche quadrate* o *tavole*)	are	20,8048
GENOVESATO	*Cannella quadra* — (144 *palmi quadrati*)	»	0,08928
LOMBARDIA	*Pertica* (24 *tavole* — 144 *piedi quadrati*)	»	6,5452
MODENESE	*Biolca* — (72 *tavole* — 4 *pertiche quadrate*)	»	28,3647
NAPOLETANO	*Moggio* — (100 *canne quadrate*).	»	6,9987
PARMENSE	*Biolca* — (6 *staia* — 12 *tavole* — 4 *pertiche quadrate*)	»	30,8144
PIEMONTE	*Giornata* (100 *tavole* — 4 *trabucchi quadrati*)	»	38,1039
ROMAGNA	*Pezza* — (16 *catene quadrate*)	»	26,4063
SARDEGNA	*Starello* di Cagliari	»	39,8675
SICILIA	*Salma* — (4096 *canne quadrate*).	»	174,6258

Toscana......	*Quadrato* — (10 *tavole* — 10 *pertiche* — 10 *deche* — 10 *braccia quadre*)......................	are	34,0619
Veneto.......	*Migliaio* — (1000 *passi quadrati* — 25 *piedi quadrati*)........	»	30,2299

Roma antica..	*Iugero* — (28800 *piedi antichi quadrati*).................	»	25,2761
Grecia antica	*Plettro* — (10000 *piedi olimpici quadrati*).................	»	9,523

Misure estere

Austria......	*Yuchart* — (1600 *Klafters quadrati*)...................	»	57,5543
Inghilterra..	*Acre* — (4840 *yards quadrati*) ..	»	40,4671
Prussia......	*Morgen* — (180 *pertiche quadrate* — La pertica lineare essendo di 12 piedi del Reno).......	»	25,5323
Russia.......	*Deciatine* — (2400 *sagène quadrate*)...................	»	109,25
Spagna.......	*Fanegada* pei campi — (500 *estadales quadrati*).............	»	48,34
	Aranzada pei vigneti — (400 *estadales quadrati*)...........	»	38,67
	(*L'estadale* è lunga 11 piedi ossia *vare* $3\frac{2}{3}$)..............	»	

Misure di capacità per gli aridi e i liquidi

Misure antiche italiane

Bolognese....	*Corba da grano* — (2 *staia* — 4 *quartaroli*)..................	Litri	78,645
	Corba da vino — (60 *boccali* — 4 *fogliette*)................	»	78,593
Genovesato ..	*Mina* — (4 *staia* — 8 *ottavi*)....	»	116,5596
	Barile da vino — (90 *amole*)...	»	79,016
	(*Mezzarola* di 2 barili).		

Lombardia....	*Moggio* — (*8 staia — 4 quartari*).	Litri	146,24
	Brenta — (*3 staia — 4 quartari — 8 boccali*)................	»	75,55
Modenese	*Staio* — (*2 mine — 4 quarti*)....	»	63,25
	Quartaro — (*90 boccali*).........	»	101,812
Napoletano ..	*Tomolo* — *2 mezzette — 2 quarti 6 misure*)...................	»	55,545
	Barile — (*60 caraffe*)...........	»	43,625
Parmense.....	*Staio* — (*2 mine — 8 quartaroli*).	»	47,040
	Brenta — (*36 pinte — 2 boccali*).	»	71,672
Piemonte.....	*Emina* — (*8 coppi — 24 cucchiai*). (*Sacco* di 5 emine).	»	23,05
	Brenta — (*36 pinte — 2 boccali — 2 quartini*)................	»	49,3069
Romagna.....	*Rubbio* — (*4 quarti — 4 staia — 2 quartucci*)................	»	294,46
	Barile da vino — (*32 boccali — 4 fogliette*)................	»	58,34
Sardegna.....	*Starello* — (*16 imbuti*)..........	»	49,17
	Botte — (*100 quartari*)	»	502,66
Sicilia	*Tomolo* — (*1 palmo cubo — 4 mondelli*)................	»	17,193
	Barile — (*2 quartari — 20 quartucci*)	»	34,386
Toscana......	*Staio* — (*2 mine — 2 quarti — 8 mezzette*)................ (*Sacco* di 3 staia).	»	24,363
	Barile da vino (*20 fiaschi — 4 mezzette — 2 quartucci*)......	»	45,584
Veneto.......	*Moggio* — (*4 staia — 4 quarti — 4 quartaroli*)................	»	333,268
	Anfora — (*4 bigonce — 2 mastelli — 24 bozze*)................	»	600,934

Roma antica..	*Anfora* eguale al cubo del piede antico romano..........	»	26
Grecia antica	*Anfora attica* = $\frac{3}{2}$ del cubo di $\frac{24}{25}$ di un piede olimpico	»	39

Misure estere

Austria	*Aridi. Metzen* — (4 *vierteln* — 4 *mässeln*)	Litri	61,5045
	Liquidi. Eimer — (4 *vierteln* — 10 *mässeln*)	»	56,6819
Danimarca	*Aridi. Toende* — (8 *skieps*)	»	139,084
	Liquidi. Ancker — (10 *stubgen*)	»	37,646
Inghilterra	*Bushel* — (8 *galloni* — 2 *pottles*)	»	36,3477
	Quarter di 8 bushels — *Load* di 10 quarters)	»	
Norvegia	*Aridi. Toende* — (8 *Skjaepper* — 18 *potter*)	Litri	139,001
	Liquidi. Pibe	»	463,3375
	» *Ame* — (155 *potter*)	»	149,6194
Olanda	*Aridi. Mudde* — (10 *schepel*)	»	100
	(*Last* di 30 mudde).		
	Liquidi. Vat — (100 *Kan*)	»	100
Portogallo	*Aridi. Fanega*	»	55,36
	(*Moio* di 15 fanegas).		
	Liquidi. Almuda	»	16,74
	(*Pipa* di 30 almudes).		
Prussia	*Aridi. Scheffel* — (16 *metzen*)	»	54,961
	Liquidi. Eimer — (2 *anker* — 30 *maasse*)	»	68,69
Russia	*Aridi. Tschetwert* — (2 *osmine*)	»	210
	Liquidi. Oxhoft — (6 *ankers*)	»	221
Spagna	*Aridi. Fanega* — (12 *calemines*)	»	55,501
	Liquidi. Moyo — (16 *arrobes*)	»	258,128
Svezia	*Aridi. Tunna* — (2 *spanne* — 4 *fierdin*)	»	146,49
	Liquidi. Oxhufwud	»	235
Turchia	*Aridi. Fortin* — (4 *Kilow*)	»	144,372
	Liquidi. Alma	»	5,205

Misure di peso

Misure antiche italiane

Bolognese	*Libbra* — (12 *once* — 16 *ferlini* — 10 *carati*)	kg.	0,361[illegible]

Genovesato	*Libbra grossa* — (12 *once* — 8 *ottavi*)	kg.	0,349
	Libbra sottile — (12 *once* — 24 *denari*)	»	0,317
Lombardia	*Libbra grossa* — (28 *once* — 24 *denari*)	»	0,7625
	Libbra sottile = $\frac{3}{7}$ di libbra grossa	»	0,32679
Modenese	*Libbra* — (12 *once* — 12 *ferlini*). (*Peso* di 25 libbre).	»	0,340455
Napoletano	*Libbra* — (12 *once*) (*Rotolo* di libbre 2 $\frac{7}{9}$).	»	0,320759
Parmense	*Libbra* — (12 *once* — 24 *denari*). (*Rubbo* di 25 libbre).	»	0,328
Piemonte	*Libbra* — (12 *once* — 8 *ottavi* — 3 *denari*)	»	0,36888
Romagna	*Libbra* — (12 *once* — 24 *denari*).	»	0,3391
Sardegna	*Libbra* — (12 *once*)	»	0,40577
Sicilia	*Rotolo* — (*libbre* 2 $\frac{1}{2}$ — 12 *once*).	»	0,79342
Toscana	*Libbra* — (12 *once* — 24 *denari* 24 *grani*)	»	0,339542
Veneto	*Libbra grossa* — (12 *once* — 16 *carati*)	»	0,476998
	Libbra sottile	»	0,3012

Roma antica	*Libbra* $\frac{1}{80}$ del peso di un piede cubo antico d'acqua piovana.	»	0,3258
Grecia antica	*Mina attica* o *libbra* — $\frac{1}{120}$ del peso di un *anfora attica* d'acqua piovana	»	0,3258

Misure estere

Austria	*Libbra* (*Pfund*) — (12 *once* — 2 $\frac{2}{3}$ *lothe*). (*Quintale* di 100 libbre).	kg.	0,560012
Baviera	*Pfund*	»	0,56
Danimarca	*Libbra* — (32 *lothe* — 4 *dramme*).	»	0,500194

INGHILTERRA	*Libbra troy* — (12 *once* — 20 *pennyweights*)	kg.	0,373242
	Libbra avoir du poids — (16 *once* — 16 *dramme*)	»	0,453593
	(*Quintale* di 112 libbre — *Tonnellata* di 20 quintali).		
NORVEGIA	*Pund* — (16 *once*)	»	0,498212
	(*Vog* di 36 pund — *Toende* di 2600 pund).		
OLANDA	*Libbra* (suddivisioni come nel Kg.)	»	1
PORTOGALLO	*Arratel*	»	0,458921
	(*Arroba* di 32 arratel — Quintale di 4 arrobe).		
PRUSSIA	*Libbra* — (32 *lothe* — 4 *quentleine*)	»	0,467702
	Libbra nuova	»	0,500
RUMENIA	*Litra*	»	0,318812
	(*Oka* di 4 litre — *Cantarin* di 44 oke).		
RUSSIA	*Libbra* — (32 *lothe* — 3 *solotnicks*)	»	0,409512
	(*Poud* di 40 libbre — *Last* di 100 poud).		
SERBIA	*Oka* — (*Tovar* di 100 oke)	»	1,282
SPAGNA	*Libbra* — (16 *once* — 8 *dramme*).	»	0,4605
	(*Arroba* di 25 libbre — *Quintale* di 4 arrobe).		
SVEZIA	*Libbra* — (32 *lothe* — 4 *grosse*)	»	0,425082
	(*Waag* di 165 libbre — *Quintale* di 128 libbre).		
TURCHIA	*Oka*	»	1,282
	Cantar	»	56,366

Monete di conto

Monete antiche italiane

BOLOGNESE	V. Romagna.		
GENOVESATO	*Lira antica* — (20 *soldi* — 12 *denari*)	Lire	0,835
LOMBARDIA	*Lira antica*	»	0,76
	» *austriaca*	»	0,865

MODENESE....	*Lira* (20 *soldi* — 12 *denari*).....	Lire	0,383
NAPOLETANO..	*Ducato* — (10 *carlini* — 10 *grani*)	»	4,25
PARMENSE.....	*Lira antica*	»	0,25
PIEMONTE.....	*Lira antica* — (20 *soldi* — 12 *denari*)	»	1,18
ROMAGNA.....	*Scudo* — (10 *paoli* — 10 *baiocchi*)	»	5,384
SARDEGNA.....	*Lira antica*	»	1,88
SICILIA	*Oncia* — (30 *tarì* — 2 *carlini* — 10 *grani*)...................	»	12,75
TOSCANA......	*Lira* — (12 *crazie* ossia 20 *soldi* di 12 *denari*)	»	0,85
	Fiorino	»	1,40
VENETO.......	*Lira austriaca* — (20 *soldi* — 5 *centesimi*)	»	0,8506

ROMA ANTICA..	*Sesterzio* o *nummus*, unità monetaria	»	0,20
	Denaro di 4 sesterzi	»	0,81
	Aureo di 25 denari, o 100 sesterzi.	»	20,38
	Talento grande di 32000 sesterzi.	»	6522
	Talento piccolo di 24000 sesterzi.	»	4491
GRECIA ANTICA	*Dramma*, unità monetaria.....	»	0,93
	Mina di 100 dramme..........	»	92,68
	Talento d' argento di 60 mine...	»	5561
	Talento d' oro di 600 mine......	»	55609

Monete estere

				Titolo
AUSTRIA......	*Fiorino* (100 *kreutzer*).......	Lire	2,4691	$\frac{900}{1000}$
BRASILE	*Milreis*	»	2,8316	$\frac{917}{1000}$
CHILÌ.........	*Peso* — (100 *centavos*)	»	5	$\frac{900}{1000}$
DANIMARCA....	*Krone* — (100 *öre*)	»	1,3888	$\frac{800}{1000}$
EGITTO	*Piastra* — (100 *parà*).........	»	0,2573	$\frac{900}{1000}$
GERMANIA.....	*Reichs-marck* — (100 *pfennige*)	»	1,2345	$\frac{900}{1000}$
GIAPPONE.....	*Yen* — (100 *sen*).............	»	5,1664	$\frac{900}{1000}$

			Titolo
INGHILTERRA ..	*Lira sterlina* — (20 *scellini* — 12 *pence*).................	Lire 25,2213	$\frac{22}{24}$
INDIE INGLESI .	*Rupia*......................	» 2,3757	$\frac{22}{24}$
MESSICO	*Peso* — (100 *centavos*)........	» 5,4308	$\frac{903}{1000}$
NORVEGIA.....	*Krone* — (100 *oere*)..........	» 1,3888	
OLANDA.......	*Fiorino* — (100 *centesimi*).....	» 2,10	$\frac{945}{1000}$
PERSIA........	*Thoman* — (100 *schahis*)......	» 11,86	$\frac{916}{1000}$
	Sachib-Keran................	» 2,08	$\frac{900}{1000}$
PERÙ	*Peso* — (100 *centavos*)........	» 5	$\frac{900}{1000}$
PORTOGALLO ..	*Milreis*....................	» 5,60	$\frac{22}{24}$
RUMENIA......	*Ley* — (100 *banis*)............	» 1	$\frac{835}{1000}$
RUSSIA	*Rublo* — (100 *kopecke*)........	» 4	$\frac{868}{1000}$
SPAGNA.......	*Piastra* — (20 reali)..........	» 5,20	
	Peseta — (100 *centimos*).......	» 1	
STATI UNITI...	*Dollaro* — (100 *centesimi*)....	» 5,1825	$\frac{900}{1000}$
SVEZIA........	*Krone* (100 *öre*).............	» 1,3888	$\frac{800}{1000}$
TURCHIA......	*Piastra* — (40 *parà*).........	» 0,2278	$\frac{830}{1000}$

FINE